Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 143, №2, P.13-34
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.17.19

Б.А. Дуйсенгалиева, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қажымұқан көш., 13, Астана, 010008, Қазақстан
(E-mail: bibinur959@gmail.com, altyngul.82@mail.ru)

Рангі екіге тең еркін дуалды Лейбниц алгебраларының қолды автоморфизмдері

Аннотация: Мақалада алгебралардың $\circ$-көпбейнесінің анықтамасы келтірілген және дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатыны дәлелденген. [Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Рангі екіге тең еркін алгебралардың автоморфизмдерінің сызықтылануы мен дифференциалдауының триангулярлануы // Сібір электронды математикалық жаңалықтары. – 2019. – Т. 16. – Б. 1133–1146.] жұмысында $\circ$-көпбейнесінің рангі екіге тең еркін алгебраларының автоморфизмдерінің сызықтылануына және дифференциалдауының триангулярлануына қатысты бірқатар нәтижелер алынған. Сол жұмыстың нәтижелерінің салдарлары ретінде біз келесі нәтижелерді аламыз: екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтіндінің құрылымын қабылдайды, сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланады және осы алгебраның кез келген локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланады.

Түйін сөздер: дуалды Лейбниц алгебрасы, автоморфизм, амальгамирленген еркін көбейтінді, сызықтылану, триангулярлану.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/2.2

2000 Mathematics Subject Classification: ???

1. Кіріспе

$k[x,y]$ көпмүшелер алгебрасының автоморфизмдері қолды екені белгілі [1,2]. Сонымен қатар осы алгебраның $Aut(k[x,y])$ автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтінді құрылымын қабылдайды [2,3], яғни

$$Aut(k[x,y]) = A *_C B,$$

мұндағы A – аффинді автоморфизмдердің ішкі группасы, B – үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасы және $C = A \cap B$. Осы нәтиженің аналогы еркін ассоциативті алгебралар [4, 5], оң симметриялы алгебралар [6] және сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған еркін Пуассон алгебралары [7] үшін де алынды. Оған қоса, еркін ассоциативті алгебралар мен еркін Пуассон алгебраларының автоморфизмдер группасы көпмүшелер алгебрасының автоморфизмдер группасына изоморфты.

1979 жылы Т. Камбаяши [8] $Aut(k[x,y])$ автоморфизмдер группасының амальгамирленген еркін көбейтіндісінің құрылымын пайдаланып, $Aut(k[x,y])$ автоморфизмдер группасының кез келген алгебралық ішкі группасы сызықты немесе үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасына түйіндес екенін дәлелдеді. Бұдан кез келген редуктивті группаның k^n-ге, мұндағы $n=2$, әрекеті сызықтыланатыны шығады.

Т. Камбаяши бұл нәтиже барлық $n > 2$ үшін де орындалады деген болжам айтты. Бұл болжам редуктивті группалар әрекеті үшін сызықтылану гипотезасы деген атау алды. $n \geq 4$ болған кезде бұл гипотеза дұрыс болмай шықты. Мысалы, 1989 жылы Г. Шварц [9] k^4-ке O_2 ортогоналды группасының және k^7-ге Sl_2 группасының әрекеті сызықтыланбайтын қарсы мысал құрастырды. [10, 11] жұмыстарда ақырлы группалардың әрекеттері сызықтыланбайтын алғашқы мысалдар құрастырылды.

1968 жылы Р. Ренчлер [12] сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан тәуелді көпмүшелер алгебрасының локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатынын дәлелдеді. Х. Басс [13] сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған үш айнымалыдан тәуелді көпмүшелер алгебрасының триангулярланбайтын локальді-нильпотентті дифференциалдауының мысалын келтірді.

$x \cdot y$ бисызықты амалы анықталған k өрісінде тұрғызылған A сызықты кеңістігі *дуалды Лейбниц алгебрасы* деп аталады, егер кез келген $x, y, z \in A$ үшін келесі тепе-теңдік орындалса:

$$(xy)z = x(yz) + x(zy).$$

Дуалды Лейбниц алгебрасын шетелдік әдебиеттерде кейде Zinbiel (Leibniz деген сөз керісінше ретпен жазылған) алгебрасы деп те атайды. Ж.-Л. Лодей дуалды Лейбниц алгебра түсінігін анықтады [14]. Оған қоса, $a \circ b = ab + ba$ симметриясына қатысты кез келген A дуалды Лейбниц алгебрасы ассоциативті және коммутативті алгебра болады [14].

Ж.-Л. Лодей [14] жақшалары оң жаққа нормаланып орналасқан барлық ассоциативті емес сөздер еркін дуалды Лейбниц алгебрасының базисін құрайтынын дәлелдеді. Еркін дуалды Лейбниц алгебралары дәл шафл көбейтіндісі бар алгебра болатыны көрсетілді [15]. А. Наураздекова [16] сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған еркін дуалды Лейбниц алгебралары симметриялы көбейтіндіге қатысты ассоциативті-коммутативті алгебра (бірлік элементі жоқ) болатынын дәлелдеді және оның туындаушыларын тапты; сондай-ақ ол екі туындаушыдан тұратын еркін дуалды Лейбниц алгебрасының ішкі алгебрасы рангі саналымды еркін дуалды Лейбниц алгебрасы болатын мысалдар құрастырды. А. Джумадильдаев пен К. Туленбаев [17] дуалды Лейбниц алгебралары үшін Нагата-Хигман теоремасының [18] аналогын дәлелдеді (әрбір дуалды Лейбниц ниль-алгебрасы нильпотентті). Сондай-ақ олар алгебралық тұйық өрісте тұрғызылған әр ақырлы өлшемді дуалды Лейбниц алгебрасы комплекс сандар өрісінде шешілетінін және нильпотентті екенін дәлелдеді. А. Наураздекова және У. Умирбаев [19] өрістің сипаттамасы нөлге тең болған жағдайда дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесінің әр меншікті ішкі көпбейнесі нильпотентті және, салдар ретінде, дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі шпехтті, ал базистік рангі бірге тең екенін дәлелдеді. Д.А. Тауэрс [20] кез келген өрісте тұрғызылған әр ақырлы өлшемді дуалды Лейбниц алгебрасы шешілетінін көрсеткен басқа авторлардың нәтижелерін кеңейтіп, олардың нильпотентті екенін көрсетті. Соңғы жылдары дуалды Лейбниц алгебраларын зерттеуге деген қызығушылық жоғары (мысалы, [21–25] жұмыстарды қараңыз).

[6] жұмыста алгебралардың $\circ$-көпбейнелерінің класы анықталған және өрісте тұрғызылған алгебралардың әр $\circ$-көпбейнесінің рангі екіге тең еркін алгебраларының қолды автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтінді құрылымын қабылдайтыны дәлелденген. Оған қоса, өрістің сипаттамасы нөлге тең болған жағдайда осы алгебралардың қолды автоморфизмдерінің редуктивті группасы сызықтыланатыны және локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатыны дәлелденген.

Осы жұмыс еркін дуалды Лейбниц алгебраларының қолды автоморфизмдері мен дифференциалдауларын зерттеуге арналған. Екінші бөлімде дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатыны дәлелденеді. Үшінші бөлім шолу сипатына ие. Бұл бөлімде жоғарыда көрсетілген нәтижелердің салдарлары ретінде екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтіндінің құрылымын қабылдайтыны көрсетіледі. Сонымен қатар сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланатыны және осы алгебраның кез келген локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатыны көрсетіледі.

2. Алгебралардың $\circ$-көпбейнесі

Айталық k кез келген өріс және $\mathfrak{M}$ k өрісінде тұрғызылған алгебралардың кез келген біртекті көпбейнесі болсын. $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ арқылы осы көпбейненің $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларынан тәуелді еркін алгебрасын белгілейік. $\deg$ арқылы $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ еркін алгебрасындағы стандартты дәреже функциясын белгілейік, яғни кез келген i үшін $\deg(x_i) = 1$.

$\mathfrak{M}$ көпбейнесін $\circ$-*көпбейне* деп атайды, егер кез келген нөлдік емес $h \in \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ және кез келген нөлдік емес $f \in \mathfrak{M}\langle x\rangle$ үшін келесі шарт орындалса:

$$\deg(f(h)) = \deg(f) \cdot \deg(h).$$

Алгебралардың $\circ$-көпбейнесінің айқын мысалдары:

1. Ассоциативті-коммутативті алгебралар көпбейнесі,
2. Ассоциативті алгебралар көпбейнесі [26],
3. Пуассон алгебраларының көпбейнесі [7].

А.А. Алимбаев, А.С. Науразбекова, Д.Х. Козыбаев [6] оң симметриялы алгебралардың, ассоциативті емес алгебралардың, коммутативті алгебралардың көпбейнелері $\circ$-көпбейне болатынын дәлелдеді.

Бұл бөлімде біз дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатынын көрсетеміз.

$x \cdot y$ бисызықты амалы анықталған k өрісінде тұрғызылған A сызықты кеңістігі *дуалды Лейбниц алгебрасы* деп аталады, егер кез келген $x, y, z \in A$ үшін келесі тепе-теңдік орындалса:

$$(xy)z = x(yz) + x(zy). \tag{1}$$

Дуалды Лейбниц алгебрасының бірлік элементі болмайтынын тексеру қиын емес.

Айталық $DL\langle X\rangle$ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ еркін туындаушылар жиынымен берілген сипаттамасы нөлге тең k өрісінде тұрғызылған еркін дуалды Лейбниц алгебрасы болсын. X^* арқылы жақшалары оң жаққа нормаланып орналасқан X алфавитіндегі барлық ассоциативті емес сөздер жиынын, яғни $x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{m-1}}x_{i_m})\ldots))$ түріндегі сөздер жиынын белгілейік, мұндағы $x_{i_j} \in X$. Ж.-Л. Лодей [14] X^* жиыны $DL\langle X\rangle$ алгебрасының сызықты базисін құрайтынын дәлелдеді. Дәрежесі ≥ 2 болатын әр u ассоциативті емес сөзі u_1u_2 түрінде бірмәнді жазылады, мұндағы $\deg(u_1), \deg(u_2) < \deg(u)$.

Кез келген $0 \neq f \in DL\langle X\rangle$ элементі келесі түрде бірмәнді жазылады:

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_s, \quad 0 \neq f_i \in DL_i\langle X\rangle,$$

мұндағы $DL_i\langle X\rangle$ – $\deg(u_i) = i$ болатын u_i мономдарынан туындайтын k-сызықты қабықша. f_s элементі $\deg$ дәреже функциясына қатысты f элементінің *жоғары біртекті бөлігі* деп аталады. Әр $0 \neq f \in DL\langle X\rangle$ элементі үшін $\deg(f) = \deg(f_s)$ деп алатын боламыз.

Лемма 1. *Айталық u, v X^* жиынының кез келген элементтері болсын және $\deg(u) = s$, $\deg(v) = t$ болсын. Онда $uv \neq 0$, uv натурал коэффициенттермен берілген X^* элементтерінің сызықты комбинациясы болып табылады және $\deg(uv) = s + t$.*

Д э л е л д е у і. $\deg(u) + \deg(v)$ бойынша индукция жүргізу арқылы дәлелдейік. Егер $\deg(u) = 1$ болса, онда $u = x_i$, $uv = x_iv$, $uv \in X^*$ және $\deg(x_iv) = 1 + t$. Енді $\deg(u) > 1$ және $u = x_iw$ деп алайық. Онда $\deg(w) = s - 1$. (1) тепе-теңдігінен

$$uv = (x_iw)v = x_i(wv + vw)$$

формуласы шығады. Индукция болжамы бойынша wv, vw натурал коэффициенттермен берілген X^* элементтерінің сызықты комбинациясы болады. Олай болса, $wv + vw$ және $uv = x_i(wv + vw)$ натурал коэффициенттермен берілген X^* элементтерінің сызықты комбинациясы болады. Сонымен қатар индукция болжамы бойынша $\deg(wv) = \deg(vw) = s + t - 1$ болғандықтан

$$\deg(uv) = \deg(wv) + 1 = s + t - 1 + 1 = s + t.$$

Осылайша, deg дәреже функциясы $DL\langle X\rangle$ алгебрасының келесі түрдегі градуировкасын анықтайды:

$$DL\langle X\rangle = DL_1\langle X\rangle \oplus DL_2\langle X\rangle \oplus \ldots$$

[16] жұмысындағы салдар 2.1-ден тура шығады

Салдар 1. $DL\langle X\rangle$ алгебрасының кез келген нөлдік емес f және g элементтері үшін $fg \neq 0$.

Лемма 2. *$DL\langle X\rangle$ алгебрасының кез келген нөлдік емес f және g элементтері үшін $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.*

Д э л е л д е у і. Айталық $f, g \in DL\langle X\rangle$ және

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_s,\ \ f_i \in DL_i\langle X\rangle,\ \ f_s \neq 0,$$
$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_t,\ \ g_j \in DL_j\langle X\rangle,\ \ g_t \neq 0$$

болсын. Онда

$$fg = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} f_i g_j.$$

$DL\langle X\rangle$ алгебрасының градуировкасы бойынша барлық i, j үшін $f_i g_j \in DL_{i+j}\langle X\rangle$. Ал салдар 1 бойынша $f_s g_t \neq 0$. Сондықтан

$$\deg(fg) = \deg(f_s g_t) = \deg(f_s) + \deg(g_t) = \deg(f) + \deg(g).$$

Лемма 3. *Айталық $0 \neq f \in DL\langle y\rangle$ және $0 \neq h \in DL\langle x, y\rangle$ болсын. Онда*

$$\deg(f(h)) = \deg(f) \cdot \deg(h).$$

Д э л е л д е у і. Айталық $f(y) = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_{m-1} y^{m-1} + \alpha_m y^m$ болсын. Онда $\deg(f) = m$,

$$f(h) = \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_{m-1} h^{m-1} + \alpha_m h^m.$$

Лемма 2 бойынша барлық i үшін

$$\deg(\alpha_i h^i) = i \cdot \deg(h).$$

Сондықтан $\deg(f(h)) = m \cdot \deg(h) = \deg(f) \cdot \deg(h)$.

Сөйлем 1. *Дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болады.*

3. Қолды автоморфизмдер группасы және локальді-нильпотентті дифференциалдаулар

Айталық k кез келген өріс болсын. Айталық $\mathfrak{M}$ k өрісінде тұрғызылған дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі болсын және $A = \mathfrak{M}\langle x, y\rangle$ осы көпбейненің x, y екі айнымалысынан тәуелді еркін алгебрасы болсын. Сонымен қатар айталық $Aut(A)$ A алгебрасының автоморфизмдер группасы болсын. $\varphi = (f_1, f_2)$ арқылы A алгебрасының $\varphi(x) = f_1$, $\varphi(y) = f_2$ болатын автоморфизмдерін белгілейік. Келесі түрдегі автоморфизмдер

$$\sigma(1, a, f) = (ax + f(y), y),$$

$$\sigma(2,a,g) = (x, ay + g(x)),$$

мұндағы $0 \neq a \in k, f(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle, g(x) \in \mathfrak{M}\langle x\rangle$, *элементар автоморфизмдер* деп аталады. $Aut(A)$ группасының барлық элементар автоморфизмдерінен туындалған $T(A)$ ішкі группасы *қолды автоморфизмдердің ішкі группасы* деп аталады. Қолды емес автоморфизмдер *жабайы автоморфизмдер* деп аталады.

Егер

$$\theta = (f_1, f_2), \varphi = (g_1, g_2)$$

болса, онда $Aut(A)$ группасында көбейтінді келесі формуламен анықталады:

$$\theta \circ \varphi = (g_1(f_1,f_2), g_2(f_1,f_2)).$$

Айталық $Af_2(A)$ A алгебрасының аффинді автоморфизмдер группасы, яғни келесі түрдегі автоморфизмдер группасы болсын:

$$(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2),$$

мұндағы $a_i, b_i, c_i \in k, a_1b_2 \neq a_2b_1$, ал $Tr_2(A)$ A алгебрасының үшбұрышты автоморфизмдер группасы, яғни келесі түрдегі автоморфизмдер группасы болсын:

$$(ax + f(y), by + c),$$

мұндағы $0 \neq a, b \in k, c \in k, f(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle$, және де $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$ болсын.

Айталық G кез келген группа, ал G_0, G_1, G_2 G группасының ішкі группалары болсын, сонымен қатар $G_0 = G_1 \cap G_2$ болсын. G группасы G_0 ішкі группасымен біріктірілген G_1 және G_2 ішкі группаларының *еркін көбейтіндісі* деп аталады және $G = G_1 *_{G_0} G_2$ деп белгіленеді, егер

(a) G группасы G_1 және G_2 ішкі группаларымен туындалса;
(b) G группасының анықтаушы қатынастары тек қана G_1 және G_2 ішкі группаларының анықтаушы қатынастарынан тұрса.

[6] жұмыста алгебралардың $\circ$-көпбейнелерінің екі айнымалыдан тәуелді еркін алгебраларының қолды автоморфизмдер группасы мен локальді-нильпотентті дифференциалдауларына қатысты бірқатар нәтижелер алынған.

Теорема 1. *[6] Айталық $\mathfrak{M}$ алгебралардың кез келген $\circ$-көпбейнесі болсын және $A = \mathfrak{M}\langle x, y\rangle$ k өрісінде тұрғызылған x, y екі айнымалысынан тәуелді осы көпбейненің еркін алгебрасы болсын. A алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$ ішкі группасымен біріктірілген $Af_2(A)$ аффинді автоморфизмдердің ішкі группасы мен $Tr_2(A)$ үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасының еркін көбейтіндісі болады, яғни*

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

$V \neq 0$ G-модулі *келтірілмейтін* немесе *жай* деп аталады, егер онда меншікті нөлдік емес G-ішкі модульдері болмаса. V G-модулі *айтарлықтай келтірілетін* немесе *жартылай жай* деп аталады, егер $V = W \oplus W'$ болатындай V G-модулінің әр W G-ішкі модулі үшін толықтыратын V G-модулінің W' G-ішкі модулі бар болса. $Aut(A)$ группасының G алгебралық ішкі группасы (сызықты) *редуктивті* деп аталады, егер әр ақырлы G-модулі айтарлықтай келтірілетін болса.

$f \in Aut(A)$ автоморфизмі *сызықтыланады* деп аталады, егер

$$\varphi^{-1} f \varphi \in Af_2(A)$$

болатын $\varphi \in Aut(A)$ автоморфизмі бар болса.

Салдар 2. [6] $\circ$-көпбейнесінің сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан туындайтын A еркін алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланады.

$A = \mathfrak{M}\langle x,y\rangle$ алгебрасының d дифференциалдауы *локальді-нильпотентті* деп аталады, егер әр $f \in A$ үшін $d^n(f) = 0$ болатын $n \in \mathbb{N}$ саны бар болса. Егер d локальді-нильпотентті дифференциалдау болса, онда келесі бейнелеу

$$exp\, d : A \to A$$

автоморфизм болады және *экспоненциалды автоморфизм* деп аталады.

A алгебрасының келесі түрдегі d дифференциалдауы *үшбұрышты* деп аталады:

$$d = a_1(y)\partial_x + a_2\partial_y,$$

мұндағы $a_1(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle$ және $a_2 \in k$. A алгебрасының d дифференциалдауы *триангулярланатын* деп аталады, егер $\varphi^{-1}d\varphi$ үшбұрышты болатындай A алгебрасының φ автоморфизмі бар болса.

Теорема 2. *[6] $\circ$-көпбейнесінің сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан туындайтын A еркін алгебрасының $exp\, D \in T(A)$ болатын кез келген D локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатын болады.*

Сөйлем 1 бойынша дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатындықтан [6] жұмыстың жоғарыда келтірілген нәтижелерінен келесі салдарлар шығады.

Салдар 3. Айталық $A = DL\langle x,y\rangle$ k өрісінде тұрғызылған x, y екі айнымалысынан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасы болсын. A алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$ ішкі группасымен біріктірілген $Af_2(A)$ аффинді автоморфизмдердің ішкі группасы мен $Tr_2(A)$ үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасының еркін көбейтіндісі болады, яғни

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

Салдар 4. Сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған $A = DL\langle x,y\rangle$ екі айнымалыдан туындайтын еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланады.

Салдар 5. Сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған $A = DL\langle x,y\rangle$ екі айнымалыдан туындайтын еркін дуалды Лейбниц алгебрасының $exp\, D \in T(A)$ болатын кез келген D локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатын болады.

Список литературы

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. – 1942. – Vol. 184. – P. 161–174.

2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wiskunde. – 1953. – Vol. 1, No. 3. – P. 33–41.

3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups // Rend. Mat. e Appl. – 1966. – Vol. 25, No. 5. – P. 208–212.

4 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II, Trans // Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 160. – P. 393-401; – 1972. – Vol. 171. – P. 309–315.

5 Макар-Лиманов Л.Г. Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими // Функциональный анализ и его приложения. – 1970. – Т. 4, № 3. – С. 107-108.

6 Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1133–1146.

7 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // Journal of Algebra. – 2009. – Vol. 322, No. 9. – P. 3318–3330.

8 Kambayashi T. Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space // Journal of Algebra. – 1979. – Vol. 60. – P. 439–451.

9 Schwarz G. Exotic algebraic group actions // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1989. – Vol. 309. – P. 89–94.

10 Moser-Jauslin L., Masuda M. and Petrie T. The equivariant Serre Problem for abelian groups // Topology. – 1996. – Vol. 35, No. 2. – P. 329–334.

11 Masuda M., Moser-Jauslin L. and Petrie T. Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Application // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1991. – Vol. 88. – P. 9065–9066.

12 Rentschler R. Operations du groure additif sur le plan // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1968. – Vol. 267. – P. 384–387.
13 Bass H. A non-triangular action of G_a on A^3 // J. of Pure and Appl. Algebra. – 1984. – Vol. 33, No. 1. – P. 1–5.
14 Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras // Math. Scand. – 1995. – Vol. 77, No. 2. – P. 189–196.
15 Loday J.-L. On the algebra of quasi-shuffles // Manuscripta mathematica. – 2007. – Vol. 123. – P. 79-93.
16 Naurazbekova A.S. On the structure of free dual Leibniz algebras // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, No. 3. – P. 40–47.
17 Dzhumadildaev A., Tulenbaev K. Nilpotency of Zinbiel algebras // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2005. – Vol. 11, No. 2. – P. 195–213.
18 Higman G. On a conjecture of Nagata // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1956. – Vol. 52. – P. 1–4.
19 Naurazbekova A., Umirbaev U. Identities of dual Leibniz algebras // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 1, No. 1. – P. 86–91.
20 Towers D.A. Zinbiel algebras are nilpotent. arXiv:2202.12026v1 (2022).
21 Covez S., Farinati M., Lebed V., Manchon D. Bialgebraic approach to rack cohomology // Algebraic and Geometric Topology. – 2023. – Vol. 23, No. 4. – P. 1551–1582.
22 Chapoton F. Zinbiel algebras and multiple zeta values. arXiv:2109.00241 (2021).
23 Ikonicoff S., Pacaud Lemay J.-S. Cartesian Differential Comonads and New Models of Cartesian Differential Cate-gories. arXiv:2108.04304 (2023).
24 Alvarez M.A., Castillo de Mello T., Kaygorodov I. Central extensions of 3-dimensional Zinbiel algebras. arXiv:2104.03429 (2021).
25 Alvarez M.A., Jnior R.F., Kaygorodov I. The algebraic and geometric classification of Zinbiel algebras. arXiv:2206.00315 (2022).
26 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. – 1964. – Vol. 56. – P. 618–632.

Б.А. Дуйсенгалиева, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан

Ручные автоморфизмы свободной дуальной алгебры Лейбница ранга два

Аннотация: В статье дается определение $\circ$-многообразия алгебр и доказывается, что многообразие дуальных алгебр Лейбница является $\circ$-многообразием. В работе [Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1133–1146.] получены результаты, касающиеся линеаризации автоморфизмов и триангуляции дифференцирований свободных алгебр ранга два $\circ$-многообразия. Как следствие результатов этой работы мы показали следующее: группа ручных автоморфизмов свободной дуальной алгебры Лейбница от двух переменных допускает структуру амальгамированного свободного произведения, любая редуктивная группа ручных автоморфизмов свободной дуальной алгебры Лейбница от двух переменных над полем нулевой характеристики линеаризуема и любое локально-нильпотентное дифференцирование этой алгебры триангулируемо.

Ключевые слова: дуальная алгебра Лейбница, автоморфизм, амальгамированное свободное произведение, линеаризация, триангуляция.

B.A. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Astana, 010008, Kazakhstan

Tame automorphisms of a free dual Leibniz algebra of rank two

Abstract: The article gives a definition of $\circ$-variety of algebras and proves that the variety of dual Leibniz algebras is a $\circ$-variety. In [Alimbaev A.A., Naurazbekova A.S., Umirbaev U. Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of a free algebras of rank 2 // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2019. – Vol. 16. – P. 1133–1146.], the results concerning the linearization of automorphisms and the triangulation of derivations of free algebras of rank two $\circ$-varieties are obtained. As a consequence of the results of this work, we have shown the following: the group of tame automorphisms of a free dual Leibniz algebra in two variables admits the structure of an amalgamated free product, any reductive group of tame automorphisms of a free dual Leibniz algebra in two variables over a field of characteristic zero is linearizable, and any locally nilpotent derivation of this algebra is triangulable.

Keywords: dual Leibniz algebra, automorphism, amalgamated free product, linearization, triangulation.

References

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 1942. Vol. 184. P. 161–174.
2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wiskunde. 1953. Vol. 1, №. 3. P. 33–41.
3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups, Rend. Mat. e Appl. 1966. Vol. 25, No. 5. P. 208–212.

4 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II, Trans, Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 160. P. 393-401; 1972. Vol. 171. P. 309–315.
5 Makar-Limanov L. Ob avtomorfizmah svobodnoj algebry s dvumya obrazuyushchimi [The automorphisms of the free algebra of two generators], Funksional. Anal. i Prilozhen. 1970. Vol. 4, №. 3. P. 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl. 1970. Vol. 4. P. 262–263. [in Russian]
6 Alimbaev A.A., Naurazbekova A.S., Umirbaev U. Linearizaciya avtomorfizmov i triangulyaciya differencirovanij svobodnyh algebr ranga 2 [Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of a free algebras of rank 2], Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019. Vol. 16. P. 1133–1146. [in Russian]
7 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, Journal of Algebra. 2009. Vol. 322, No. 9. P. 3318–3330.
8 Kambayashi T. Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space, Journal of Algebra. 1979. Vol. 60. P. 439–451.
9 Schwarz G. Exotic algebraic group actions, C.R. Acad. Sci. Paris. 1989. Vol. 309. P. 89–94.
10 Moser-Jauslin L., Masuda M. and Petrie T. The equivariant Serre Problem for abelian groups, Topology. 1996. Vol. 35, №. 2. P. 329–334.
11 Masuda M., Moser-Jauslin L. and Petrie T. Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Application, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1991. Vol. 88. P. 9065–9066.
12 Rentschler R. Operations du groure additif sur le plan, C.R. Acad. Sci. Paris. 1968. Vol. 267. P. 384–387.
13 Bass H. A non-triangular action of G_a on A^3, J. of Pure and Appl. Algebra. 1984. Vol. 33, №. 1. P. 1–5.
14 Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, Math. Scand. 1995. Vol. 77, №. 2. P. 189–196.
15 Loday J.-L. On the algebra of quasi-shuffles, Manuscripta mathematica. 2007. Vol. 123. P. 79-93.
16 Naurazbekova A.S. On the structure of free dual Leibniz algebras, Eurasian Mathematical Journal. 2019. Vol. 10, №. 3. P. 40–47.
17 Dzhumadildaev A., Tulenbaev K. Nilpotency of Zinbiel algebras, Journal of Dynamical and Control Systems. 2005. Vol. 11, №. 2. P. 195–213.
18 Higman G. On a conjecture of Nagata, Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. Vol. 52. P. 1–4.
19 Naurazbekova A., Umirbaev U. Identities of dual Leibniz algebras, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. 2010. Vol. 1, №. 1. P. 86–91.
20 Towers D.A. Zinbiel algebras are nilpotent. arXiv:2202.12026v1 (2022).
21 Covez S., Farinati M., Lebed V., Manchon D. Bialgebraic approach to rack cohomology, Algebraic and Geometric Topology. 2023. Vol. 23, №. 4. P. 1551–1582.
22 Chapoton F. Zinbiel algebras and multiple zeta values. arXiv:2109.00241 (2021).
23 Ikonicoff S., Pacaud Lemay J.-S. Cartesian Differential Comonads and New Models of Cartesian Differential Cate-gories. arXiv:2108.04304 (2023).
24 Alvarez M.A., Castillo de Mello T., Kaygorodov I. Central extensions of 3-dimensional Zinbiel algebras. arXiv:2104.03429 (2021).
25 Alvarez M.A., Jnior R.F., Kaygorodov I. The algebraic and geometric classification of Zinbiel algebras. arXiv:2206.00315 (2022).
26 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras, Proc. London Math. Soc. – 1964. – Vol. 56. – P. 618–632.

Авторлар туралы мәліметтер:

Дуйсенгалиева Б.А. – ***байланыс үшін автор,*** PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Алгебра және геометрия кафедрасының аға оқытушысы, Қажымұқан көшесі 13, Астана, 010008, Қазақстан.

Науразбекова А.С. – PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Алгебра және геометрия кафедрасың доценті, Қажымұқан көшесі 13, Астана, 010008, Қазақстан.

Duisengaliyeva B.A. – ***corresponding author,*** PhD, Senior Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Astana, 010008, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.05.2023