

ӘОЖ 539.3

РЕЛЬСТІҢ БОЙЛЫҚ ТЕРБЕЛІСІ

Балтабай Дәурен Қуанышбекұлы

dauren_bk7@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 1-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Ғ. Ибраев

Доңғалақ-теміржол контактісінде құрғақ үйкелісті есепке ала отырып, серпімді және дискретті серпімді негіздерде жатқан рельстің бойлық тербелісіне қозғалыстағы вагонның әсер ету есебінің шешімі алынды.

Жалпы жағдайда осыған ұқсас есептердің динамикасы Никитин-Тюреходжаевтың сызықты емес дифференциалдық теңдеуімен сипатталады [1-3]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} + \chi \left(\frac{\partial u}{\lambda \partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \right) \tau_d = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial x}$$

мұнда τ_d - құрғақ үйкеліс контактісімен байланысты шама, σ - кернеу, v - жылдамдық, u - сырықтың көлденең қимасының жылжуы, χ - қозғалыс кезінде $\text{sign}(v)$ мәнін қабылдайтын, ал тыныштық қалпында (1;-1) аралығындағы кез келген мәнді қабылдайтын, есепті шешу кезінде құрылатын функция.

Доңғалақ-теміржол контактісінде құрғақ үйкеліспен жүретін доңғалақтардың немесе темір жол құрамының қозғалысын модельдейтін жүгірмелі жинақталған жүктемелер рельстің бойымен бағытталатын локализацияланған бойлық күштер ретінде қарастырылады.

Төрт осьтік жылжымалы құрамның доңғалақтары рельстермен өзара әрекеттескенде сызықтық емес теңдеу (1) келесідей жазылуы мүмкін:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha u = -\frac{\tau_k}{EF} [\delta(v_0 t - x) + \delta(v_0 t - x - l_1) + \delta(v_0 t - x - l_1 - l_2) + \delta(v_0 t - x - 2l_1 - l_2)] \quad (2)$$

(2) теңдеу бастапқы

$$t = 0; u(0, x) = 0; \quad (3)$$

және шекаралық

$$x = 0, \quad \sigma(t, 0) = E \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = -\sigma_0 \left[\delta(t) + \delta\left(t - \frac{l_1}{v_0}\right) + \delta\left(t - \frac{l_1 + l_2}{v_0}\right) + \delta\left(t - \frac{2l_1 + l_2}{v_0}\right) \right],$$

$$x = L \text{ болғанда } \sigma(t, L) = 0 \quad (4)$$

шарттармен шешіледі, мұнда v_0 - жылжымалы құрамның жылдамдығы, $\delta(z)$ - Дирактың дельта-функция, $\sigma_0 - x = 0$ дөңгелек соңында соққы кернеуі, l_1 - бірінші және екінші, l_2 - екінші және үшінші доңғалақ арасындағы арақашықтық.

(1) – (4) есептерді шешу үшін Лапласа – Карсонның операциялық есептеуі қолданылады. Бұл жағдайда түпнұсқаға көшу береді:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \frac{a^3 \tau_k}{EF(a^2 - v_0^2) \beta} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(n-m)!(2m+1)!} \left\{ \left[\left(\frac{(2r+1)L+x}{a} \right)^{2(n-m)} H[at - (2r+1)L - x] + \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{(2r+1)L-x}{a} \right)^{2(n-m)} H[at - (2r+1)L + x] \right] \cdot \left[H\left(t - \frac{L}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{L+l_1}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{L+l_1+l_2}{v_0}\right) + \right. \\ & + \left. H\left(t - \frac{L+2l_1+l_2}{v_0}\right) \right] + \left[\left(\frac{2rL+x}{a} \right)^{2(n-m)} H[at - 2rL - x] + \left(\frac{2(r+1)L-x}{a} \right)^{2(n-m)} H[at - 2(r+1)L + x] \right] \times \\ & \times \left[1 + H\left(t - \frac{l_1}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{l_1+l_2}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{2l_1+l_2}{v_0}\right) \right] \left\{ \sum_{k=0}^m (-1)^{n+m+k} \frac{t^{2m-k}}{(2m-k)! \beta^{k+1}} + \frac{\sigma_0 \cdot a}{E} \right\} \times \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} \left[I_0 \left(b \sqrt{t^2 - \left(\frac{2rL+x}{a} \right)^2} \right) H\left(t - \frac{2rL+x}{a}\right) + I_0 \left(b \sqrt{t^2 - \left(\frac{2(r+1)L-x}{a} \right)^2} \right) H\left(t - \frac{2(r+1)L-x}{a}\right) \right] \times \\ & \times \left[1 + H\left(t - \frac{l_1}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{l_1+l_2}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{2l_1+l_2}{v_0}\right) \right] - \frac{a^2 v_0 \tau_k}{EF(a^2 - v_0^2) \beta} sh \beta t \left[H\left(t - \frac{x}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{x+l_1}{v_0}\right) + \right. \\ & + \left. H\left(t - \frac{x+l_1+l_2}{v_0}\right) + H\left(t - \frac{x+2l_1+l_2}{v_0}\right) \right] + \frac{a^2 v_0}{b^2} (1 - \cos bt) \end{aligned} \quad (5)$$

Серпімді дискретті негізде жатқан рельстің сызықты емес дифференциалдық теңдеуі

(1) келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \alpha u(t, x_k) \delta(x - x_k) = \frac{1}{EF} \tau_k \delta(v_0 t - x) \quad , \quad (6)$$

мұнда сол бөлігінің соңғы мүшесінде темір жол шпалдарының есепке алынуы сипатталады.

(6) теңдеу бастапқы және шекаралық шарттармен бірге есептеледі.

$$t = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} = 0$$

$$x = 0, \quad \sigma(t, 0) = E \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = -\sigma_0 \delta(t) \quad (7)$$

(6) дифференциалдық теңдеудің шешімінің түпнұсқасы келесіні береді:

$$u(t, x) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=2}^n \frac{a^{k-1}}{2} \sum_{s=1}^{k-1} \left\{ \left[\left(t + \frac{x_k - x_s}{a} \right) H \left(t + \frac{x_k - x_s}{a} \right) - \left(t - \frac{x_k + x_s}{a} \right) H \left(t - \frac{x_k + x_s}{a} \right) \right] \delta(x - x_k) + \right.$$

$$+ \frac{a}{4} \left[\left(t + \frac{x - x_s}{a} \right)^2 H \left(t + \frac{x - x_s}{a} \right) - \left(t + \frac{x - 2x_k + x_s}{a} \right)^2 H \left(t - \frac{x}{a} + \frac{2x_k - x_s}{a} \right) \right] +$$

$$+ \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_s}{a} \right)^2 H \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_s}{a} \right) - \left(t - \frac{x}{a} + \frac{2x_k - x_s}{a} \right)^2 H \left(t - \frac{x}{a} + \frac{2x_k - x_s}{a} \right) \cdot H(x - x_k) \left. \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\tau_k \cdot a}{EF} \left[\frac{a}{v_0^2} \delta \left(t - \frac{x_k}{a} \right) - \frac{1}{v_0} \delta \left(t - \frac{x_k}{v_0} \right) + \frac{a^3}{a^2 - v_0^2} \left(t - \frac{x_k}{a} \right) H \left(t - \frac{x_k}{a} \right) - \frac{a^2 v_0}{a^2 - v_0^2} \left(t - \frac{x_k}{v_0} \right) \right] \times \right.$$

$$\times H \left(t - \frac{x_k}{v_0} \right) \left. \right\} \delta(x - x_k) + \left[\frac{\sigma_0 a}{E} H \left(t - \frac{x_k}{a} \right) + v_0 t - \frac{v_0}{a^2} \right] \delta(x - x_k) + \frac{\tau_k}{EF} \left\{ \frac{a^2}{2} \left[\delta \left(t - \frac{x}{a} + \frac{2x_k}{a} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \delta \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] + \frac{a^4}{2(a^2 - v_0^2)} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2x_k}{a} \right) H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2x_k}{a} \right) - \left(t - \frac{x}{a} \right) H \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] -$$

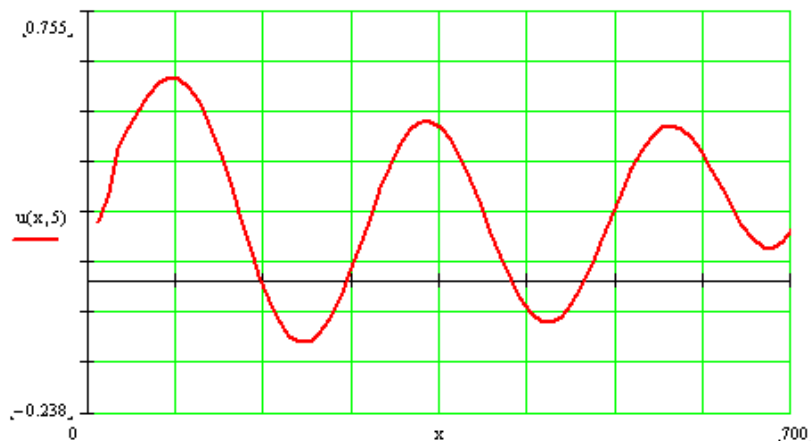
$$- \frac{a}{2v_0} \left[H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k - x_k}{a} - \frac{x_k}{v_0} \right) - H \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k - x_k}{a} - \frac{x_k}{v_0} \right) \right] - \frac{a^3 v_0}{4(a^2 - v_0^2)} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k - x_k}{a} - \frac{x_k}{v_0} \right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k - x_k}{a} - \frac{x_k}{v_0} \right) - \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k - x_k}{a} - \frac{x_k}{v_0} \right)^2 H \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k - x_k}{a} - \frac{x_k}{v_0} \right) \right] \left. \right\} H(x - x_k) +$$

$$+ \left\{ \frac{\sigma_0 a^2}{2EF} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2x_k}{a} \right) H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2x_k}{a} \right) - \left(t - \frac{x}{a} \right) H \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{av_0}{4} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a} \right)^2 H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a} \right) - \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a} \right)^2 H \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a} \right) \right] - \frac{v_0}{2a} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times H\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a}\right) - \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a}\right) H\left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a}\right) \Big\} H(x - x_k) + \left[\frac{\sigma_0 a}{E} H\left(t - \frac{x_k}{a}\right) + v_0 t - \frac{v_0}{a} \right] \delta(x - x_k) + \\
& + \left\{ \frac{\sigma_0 \cdot a^2}{2E} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2x_k}{a}\right) H\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2x_k}{a}\right) - \left(t - \frac{x}{a}\right) H\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] + \right. \\
& + \frac{av_0}{4} \left[\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a}\right) H\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a}\right) - \left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a}\right) H\left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a}\right) \right] - \\
& \left. - \frac{v_0}{a^2} \left[H\left(t + \frac{x}{a} - \frac{x_k}{a}\right) - H\left(t - \frac{x}{a} + \frac{x_k}{a}\right) \right] \right\} H(x - x_k)
\end{aligned} \tag{8}$$



Нақты уақыт мезеті үшін $E = 2 \cdot 10^{11}$ н/м², $v_0 = 20$ м/с, $\sigma_0 = 12 \cdot 10^6$ н/м² болғандағы ұзын рельстің көлденең қимасының орын ауыстыруы графигі

$u(t, x)$ орын ауыстыруының өзгеру заңдылығының анализі (5) шешімдегі төрт қосындының көбейтіндісін беретін бірінші мүше аз шама болғандықтан, оны ескермесе де болады. Алайда кернеуді анықтаған кезде ол мүшені ескеру қажет.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. *L.V. Nikitin and A.N. Tyurehodgaev. Wave Propagation and Vibration of Elastic Rods with Interfacial Frictional Slip. Wave Motion 12 (1990) 513-526 North-Holland.*
2. *L.V. Nikitin and A.N. Tyurehodgaev. Deformation of the Underground Pipeline under Action of Seismic Wave. XIIth European Conference of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. 7-10 June 1999 Amsterdam, the Netherlands.*
3. *Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н. Воздействие ударной волны в грунте на подземный трубопровод, стр. 98-106. Известия академии наук СССР. Механика твердого тела №1, Москва, 1987г.*