УДК 517

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ И НЕРАВЕНСТВА ТИПА УЛЬЯНОВА

Амантаева А.А., магистрант
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
г.Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – А.А. Джумабаева
aiymka96@mail.ru

Пусть $L_p = L_p[0,2\pi]$ $(1 \le p < \infty)$ пространство 2π - периодических измеримых функций, для которых $|f|^p$ интегрируема, и $L_\infty = C[0,2\pi]$- пространство 2π - периодических непрерывных функций с $\|f\|_\infty = \max\{|f(x),0 \le x \le 2\pi|\}$.

Пусть функция $f \in L_1$ имеет ряд Фурье

$$f(x) \approx \sigma(f) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu(f)\cos\nu x + b_\nu(f)\sin\nu x).$$

Тогда ряд

$$\sigma(f,\lambda,\beta) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left(a_\nu(f)\cos\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_\nu(f)\sin\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right),$$

преобразованный ряд Фурье функции f, где $\lambda = \{\lambda_n\}$ данная последовательность положительных чисел, $\beta \in \Re$.

Функцию, ряд которой совпадает с $\sigma(f,\lambda,\beta)$ будем называть (λ,β)-производной функции f и обозначим $f^{(\lambda,\beta)}$. Если $\lambda_n = n^r, r > 0, \beta = r$,тогда $f^{(\lambda,\beta)} = f^{(r)}$ -дробные производные в смысле Вейля и для $\lambda_n = n^r, r > 0, \beta = r+1$, $f^{(\lambda,\beta)} \equiv \bar{f}^{(r)}$, где $\bar{f}$ –сопряженная функция f .

Основной задачей является нахождение оценок модули гладкости функции с преобразованным рядом Фурье через модули гладкости исходной функции при разных параметрах $1 < p < q \le \infty$, для среднего значения ограниченной вариационной последовательности.

Определение 1. *Последовательность* $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *принадлежит классу MVBVS (среднее значение ограниченной вариационной последовательности) если существует* $\mu \ge 2$ *и выполняется следующее условие*

$$\sum_{k=n}^{2n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \le \frac{C}{n} \sum_{k=\frac{n}{\mu}}^{\mu n} |\lambda_k|$$

для всех целых чисел n, где константа C не зависит от n.

Пусть $\omega_k(f,\delta)_p$ модули гладкости натурального порядка $k \in N$ функции f, т.е.

$$\omega_k(f,\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \Delta_h^k(f) \right\|_p ,$$

где

$$\Delta_h^k(f) = \Delta_h^{k-1}(\Delta_h(f(x)) \text{ и } \Delta_h(f) = f(x+h) - f(x)$$

История неравенства типа Ульянова начинается с результатов Харди и Литтлвуда. В 1928 году Харди и Литлвуд получили следующий результат

$$H_p^{\alpha} = \left\{ f \in L_p[0,2\pi] : \left\| f(x+h) - f(x) \right\|_p = o(h^{\alpha}) \right\} = Lip(\alpha, p)$$
$$\Rightarrow Lip(\alpha, p) \subseteq Lip(\alpha - \theta, q)$$

$$H_p^{\alpha} \subseteq H_p^{\alpha-\theta} ,$$

где $1 \le p < q < \infty,\ \theta = 1/p - 1/q,\ \theta < \alpha \le 1.$

В 1968 году Ульяновым было доказано, что

$$\omega_{\alpha}(f,\delta)_p \le C\left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\theta} \omega(f,t)_p \right)^{q_1} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

где

$$1 \le p < q \le \infty,\ \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ q_1 = \begin{cases} q, q < \infty, \\ 1, q = \infty. \end{cases}$$

Здесь

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \omega_1(f,\delta)_p .$$

DeVore, Riemenschnude, Sharpley в 1979 году доказали следующее неравенство

$$\omega_k(f,\delta)_p \le C\left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta}\omega_k(f,t)_p\right)\frac{dt}{t}\right)$$

В 2005 году Тихонов и Ditzianполучили следующий неравенство

$$\omega_k(f^{(r)},\delta)_p \le C\left(\int_0^\delta \left(t^{-r-\theta}\omega_{k+r}(f,t)_p\right)^{q_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

где $r \in 0 < p < q \le \infty,\ k, r \in \mathrm{N}$.

Неравенство типа Ульянова для модулей гладкости дробного порядка были рассмотрены в работах Тихонова С., Симонова Б. и других авторов.

Пусть $\omega_\alpha(f,\delta)_p$ модули гладкости дробного порядка $\alpha, \alpha > 0$, функции f, т.е.

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta}\left\|\Delta_h^\alpha(f)\right\|_p ,$$

,

где

$$\Delta_h^\alpha(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\alpha}{\nu}f\left(x+(\alpha-\nu)\right)$$

разность дробного порядка $\alpha, \alpha > 0$, функции $f \in L_p$ в точке x с шагом h.

Мы получили неравенство типа Ульянова для модули гладкости дробного порядка с MVBVS последовательностями.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p$, $1 < p < q < \infty$, $\theta = 1/p - 1/q$, $\rho > 0$ *и* $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in MVBVS$. *Тогда, для любого* $\alpha > 0$,

$$\omega_\alpha\left(\varphi, \frac{1}{2^n}\right)_q \le C\left(\sum_{k=\frac{2^n}{\mu}}^{\infty} |\lambda_k|^q k^{\theta q-1}\omega_{\alpha+\theta+\rho}\left(f, \frac{1}{k}\right)_p\right)^{1/q} .$$

$$+2^{n(\theta+\rho)}\omega_{\alpha+\theta+\rho}\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_p \max_{1\le l\le n}\sum_{k=\frac{2^l}{\mu}}^{\mu 2^l}\frac{|\lambda_k|}{k^{\rho+1}}$$

Список использованных источников

1. R. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Berlin: Springer-Verlag, 1993, P. 449.
2. A.A.Jumabayeva Sharp Ulyanov inequalities for generalized Liouville–Weyl derivatives,// Analysis Math. Vol. 43.- Is. 2, 2017, P. 279-302
3. Song Ping Zhou, Ping Zhou, and Dan Sheng Yu The Ultimate Condition to Generalize Monotonicity for Uniform Convergence of Trigonometric Series. [Электронный ресурс] режим доступа: https://arxiv.org/pdf/math/0611805.pdf.