УДК 517

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХАРДИ БЕЛЛМАНА.

Нығметов Нұрболат Бақытұлы
Nurbolat.nygmetov@nu.edu.kz
Магистрант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Тлеуханова Н.Т.

Определение:

Ортонормированная система $\Phi = \{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ функций,определенных на промежутке [0,1], называется регулярной, если существует постоянная C, такая, что

1) Для любого промежутка e из [0.1] и $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство
2)
$$\left|\int_e \phi_k(x)dx\right| \le Cmin\left(\mu e, \frac{1}{k}\right),$$

3) Для любого промежуткаw(конечная арифметическая прогрессия с шагом 1) из $\mathbb{N}$ и $t \in (0.1]$верно неравенство
4)
$$\left(\sum_{k\in w} \phi_k\right)^* \le Cmin\left(|w|, \frac{1}{t}\right),$$

Где $\left(\sum_{k\in w} \phi_k(\cdot)\right)^*(t)$ *– невозрастающая перестановка функции* $\sum_{k\in w} \phi_k(x)$, $|w|$ *– количество элементов во множестве* w.

Пусть$\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ - регулярные системы, $I = \{I_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ - некоторая последовательность конечных подмножеств из $\mathbb{N}$.

Jпоследовательность множеств $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,где $J_k = \{m: k \in I_m\}$.

К приеру,

$I_1 = \{1, 2, 5\}$
$I_2 = \{1, 10, 15, 16\}$
$I_3 = \{1, 2, 9, 15, 30\}$
$I_4 = \{4, 6, 9, 10\}$
$I_5 = \{4, 5, 14, 15\}$
$I_6 = \{1, 2, 9, 15\}$
$I_7 = \{10, 15, 20, 25\}$

$J_1 = \{1, 2,3,6\}$
$J_2 = \{1, 3,6\}$
$J_3 = \emptyset$
$J_4 = \{4, 5\}$
$J_5 = \{1, 5\}$
$J_6 = \{4\}$
$J_7 = \emptyset$
$J_8 = \emptyset$
$J_9 = \{3, 4, 6\}$
$J_{10} = \{2, 4, 7\}$
$J_{11} = \emptyset$
$J_{12} = \emptyset$
$J_{13} = \emptyset$
$J_{14} = \{5\}$
$J_{15} = \{2, 3, 5, 6, 7\}$
$J_{16} = \{2\}$
$J_{20} = \{7\}$
$J_{25} = \{7\}$
$J_{30} = \{3\}$

Для $f \in L_1[0.1]$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$и последовательности $I = \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ преобразования $H(f, I;\ \Phi;\ \Psi)$и $B(f, I;\ \Phi;\ \Psi)$ определены следующим образом

$$H(f, I;\ \Phi;\ \Psi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|I_k|} \left(\sum_{m\in I_k} a_m \right) \varphi_k(x) \qquad (1)$$

$$B(f, I;\ \Phi;\ \Psi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m\in I_k} \frac{a_m}{|I_k|} \right) \varphi_k(x) \qquad (2)$$

(1) назовём преобразованием Харди и (2) - преобразованием Беллмана, которые отвечают последовательности множеств $I = \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и системам функций $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Когда $I_k = \{1, 2, 3 \ldots., k\}, k \in \mathbb{N}$, и системы равны $\Phi = \Psi = \{coskx\}_k$, то эти преобразования называются соответственно преобразованиями Харди и Беллмана.

Теорема 1

Если $2 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $1 \le q \le \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - регулярные системы $I = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ - семейство отрезков в $\mathbb{N}$ таких, что $|I_k| \ge k$ ($|I_k| -$ количество элементов в I_k), тогда преобразования $H(f, I;\ \Phi;\ \Psi)$и $B(f, I;\ \Phi;\ \Psi)$ ограничены в пространствах $L_{pq}[0.1]$и $L_{p'q}[0.1]$, соответственно, и следующие неравенства верны:

$$\|H(f, I;\ \Phi;\ \Psi)\|_{L_{pq}} \le c\|f\|_{L_{pq}}$$

$$\|B(f, I;\ \Phi;\ \Psi)\|_{L_{pq}} \le c\|f\|_{L_{p'q}}$$

В данном случае с зависит лишь от параметров pи q.

Теорема 2

Если$1 < p \le 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $1 \le q \le \infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - регулярные системы,$I = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ - семейство конечных множеств из $\mathbb{N}$, и данные условия удовлетворены: $|I_k| = k$ и$I_k \subset I_{k+1}$. , тогда преобразования $H(f, I;\ \Phi;\ \Psi)$и $B(f, I;\ \Phi;\ \Psi)$ ограничены в пространствах $L_{pq}[0.1]$и $L_{p'q}[0.1]$, соответственно.

Список использованных источников

1. Stein E. M., Shakarchi R. Fourier analysis: an introduction. – Princeton University Press, 2011. – Т. 1.
2. Tleukhanova, Nazerke Tulekovna. "On Hardy and Bellman transformations for orthogonal Fourier series." Mathematical Notes 70.3.- 2001.-P. 577-579.