ӘОЖ 512

МАТРИЦАЛЫҚ АЛГЕБРАДАҒЫ ХОПФ БЕЙНЕЛЕУЛЕРІ

Даниярбек Рай Керімбекұлы
ray.daniyarbek@yandex.ru
Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университетінің 2 – курс магистранты
Ғылыми жетекші – Абуталипова Ш. У.

Алдымен негізгі белгілеулер мен анықтамаларға тоқталайық: k - өріс, $k[x]$ - бір айнымалыдан тәуелді көпмүшелер сақинасы, $k[x,x']$- сәйкесінше екі айнымалыдан тәуелді көпмүшелер сақинасы болсын. Бұл сақиналардың сонымен қатар алгебра болатындықтары да белгілі. [1] еңбекте екінші ретті матрицалық Ли алгебраларының Хопф құрылымдары тұрғызылған. Бұл жұмыста үшінші ретті матрицалық Ли алгебраларының Хопф алгебраларының құрылымы анықталады.

Алгебралардың гомоморфизмдерін анықтайық

$$\Delta : k[x,x^{-1}] \to k[x',x'^{-1},x'',x''^{-1}],\ \varepsilon : k[x,x^{-1}] \to k\,, S : k[x,x^{-1}] \to k[x,x^{-1}]$$

төмендегі формулалар бойынша:

$$\Delta(x) = x'x'' \ , \quad \varepsilon(x) = 1 \, , \quad S(x) = x^{-1} \ (1)$$

мұндағы Δ, ε, S гомоморфизмдері $k[x, x^{-1}]$ алгебрасында кокоммутативті Хопф алгебрасының құрылымын береді.

Кез келген A алгебрасы үшін $M_3(A)$ арқылы элементтері A алгебрасынан алынған 3×3 матрицалар алгебрасын белгілейік. $M_3(A)$ жиын ретінде A^9 жиынына биективті. Онда кез келген А коммутативті алгебрасы үшін келесі биекцияны аламыз

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(M(3), A) \cong M_3(A) \quad (2)$$

мұндағы $M(3) - k[a,b,c,d,e,h,g,l,m]$ көпмүшелер алгебрасы. Бұл f биекциясы $M(3) \to A$ алгебрасының гомоморфизміне келесі матрицаны сәйкес қояды

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ f(d) & f(e) & f(h) \\ f(g) & f(m) & f(l) \end{pmatrix}$$

$M_3(A) \times M_3(A) \to M_3(A)$ матрицаларының көбейтіндісін біздің жалпы түрде $M(3)$ арқылы көрсеткіміз келетін бейнелеу. $M_3(A) \times M_3(A)$ жиыны A^{18} жиынына биективті, сондықтан біз келесі көпмүшелер алгебрасын енгіземіз

$$M(3)^{\otimes 2} = k[a',a'',b',b'',c',c'',d',d'',e',e'',h',h'',g',g'',m',m'',l',l''] \ (3)$$

Сөйлем 1. $\Delta : M(3) \to M(3)^{\otimes 2}$ – келесі формуламен берілген,алгебралар гомоморфизмі болсын

$\Delta(a) = a'a'' + b'd'' + c'g''$, $\Delta(b) = a'b'' + b'e'' + c'l''$, $\Delta(c) = a'c'' + b'h'' + c'm''$,
$\Delta(d) = d'a'' + e'd'' + h'g''$, $\Delta(e) = d'b'' + e'e'' + h'l''$, $\Delta(h) = d'c'' + e'h'' + h'm''$,
$\Delta(g) = g'a'' + l'd'' + m'g''$, $\Delta(l) = g'b'' + l'e'' + m'l''$, $\Delta(m) = g'c'' + l'h'' + m'm''$.

Онда кез келген кокоммутативті A алгебрасы үшін Δ гомоморфизмі (2), (3) орындалған жағдайда матрицалық көбейтуге сәйкес келеді.

1 сөйлемдегі Δ анықтайтын формулаларды матрицалық түрге көшіріп жазған ыңғайлы:

$$\Delta\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ g & l & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(a) & \Delta(b) & \Delta(c) \\ \Delta(d) & \Delta(e) & \Delta(h) \\ \Delta(g) & \Delta(l) & \Delta(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & h' \\ g' & l' & m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ d'' & e'' & h'' \\ g'' & l'' & m'' \end{pmatrix} \quad (4)$$

$M_3(A)$ матрицалық алгебрасының кері элементтерінің $GL_3(A)$ тобын қарастырайық. Егер A алгебрасы коммутативті болса, онда A алгебрасында керіленетін матрицалар олар тек анықтауышы A алгебрасында керіленетіндер:

$$GL_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \xi & \sigma \\ \eta & \theta & \mu \end{pmatrix} \right\} \in M_3(A) \,|\, (\alpha\beta\mu + \beta\sigma\eta + \delta\theta\gamma) - (\gamma\xi\eta + \beta\delta\mu + \sigma\theta\alpha) \in A^x$$

$GL_3(A)$ тобының ішкі тобы ретінде $SL_3(A)$ тобын анықтайық, яғни анықтауышы $(\alpha\varepsilon\mu+\beta\sigma\eta+\delta\theta\gamma)-(\gamma\xi\eta+\beta\delta\mu+\alpha\theta\sigma)=1$ болатын матрицалардан құралған.

Сөйлем 2. Коммутативті алгебралар енгізейік

$$GL(A)=M(3)[t]/(((aem+bhg+dlc)-(ceg+dbm+ahl))t-1)$$

және

$$SL(3)=GL(3)/(t-1)=M(3)/((aem+bhg+dlc)-(ceg+dbm+ahl)-1)$$

Онда кез келген A коммутативті алгебрасы үшін келесі биекциялар бар болады

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(GL(3),A)\cong GL_3(A) \text{ және } Hom_{\mathrm{Alg}}(SL(3),A)\cong SL_3(A), \quad (5)$$

және олар f гомоморфизмін келесі матрицаға бейнелейді

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ f(d) & f(e) & f(h) \\ f(g) & f(l) & f(m) \end{pmatrix}.$$

Дәлелдеуі. Біз тек қана $GL(3)$ үшін қарастырамыз. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \xi & \sigma \\ \eta & \theta & \mu \end{pmatrix}$- матрицасы $GL_3(A)$ тобының матрицасы болсын. A алгебрасы коммутативті болғандықтан, $f: M(3)[t]\to A$ келесі шарттарды қанағаттандыратын жалғыз гомоморфизм табылады:

$$f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta,\ f(c)=\gamma,\ f(d)=\delta,\ f(e)=\xi,\ f(h)=\sigma,\ f(g)=\eta,\ f(l)=\theta,$$
$$f(m)=\mu \text{ және } f(t)=((\alpha\varepsilon\mu+\beta\sigma\eta+\delta\theta\gamma)-(\gamma\xi\eta+\beta\delta\mu+\alpha\theta\sigma))^{-1}.$$

Осылай,

$f(((aem+bhg+dlc)-(ceg+dbm+ahl))t-1)=$
$=((f(a)f(e)f(m)+f(b)f(h)f(g)+f(d)f(l)f(c))-$
$-(f(c)f(e)f(g)+f(d)f(b)f(m)+f(a)f(h)f(l)))f(t)-f(1)=$
$=((\alpha\beta\mu+\beta\sigma\eta+\delta\theta\gamma)-(\gamma\xi\eta+\beta\delta\mu+\sigma\theta\alpha))((\alpha\beta\mu+\beta\sigma\eta+\delta\theta\gamma)-(\gamma\xi\eta+\beta\delta\mu+\sigma\theta\alpha))^{-1}-$
$-1=0.$

Келесі лемма 2 сөйлемдегі Δ гоморфизмін тікелей есептеу арқылы алынады.

Лемма 3.
$\Delta((aem+bhg+dlc)-(ceg+dbm+ahl))=((a'e'm'+b'h'g'+d'l'c')-(c'e'g'+d'b'm'+a'h'l'))$
$((a''e''m''+b''h''g''+d''l''c'')-(c''e''g''+d''b''m''+a''h''l''))$ теңдігі орындалады.

Енді біз $GL(3)$, $SL(3)$ алгебралық терминдері үшін $GL_3(3)$ және $SL_3(3)$ топтарының құрылымдарын қарастырамыз. Коммутативті алгебраларды қарастырайық.

$GL(3)^{\otimes 2}=M(3)^{\otimes 2}[t',t'']/(((a'e'm'+b'h'g'+d'l'c')-(c'e'g'+d'b'm'+a'h'l')t'-1,$
$,((a''e''m''+b''h''g''+d''l''c'')-(c''e''g''+d''b''m''+a''h''l''))t''-1)$
және

$$SL(3)^{\otimes 2} = GL(3)^{\otimes 2}[t'-1, t''-1] / (((a'e'm' + b'h'g' + d'l'c') - (c'e'g' + d'b'm' + a'h'l') - 1,$$
$$, ((a''e''m'' + b''h''g'' + d''l''c'') - (c''e''g'' + d''b''m'' + a''h''l'')) - 1).$$

Сөйлем 4. 2 сөйлемдегі формулалар

$$\Delta : GL(3) \to GL(3)^{\otimes 2} \text{ және } \Delta : SL(3) \to SL(3)^{\otimes 2}$$

алгебралар гомоморфизмін анықтайды.

Дәлелдеуі. 2 сөйлемдегі формулалар $GL(3)^{\otimes 2}$ тобындағы $M(3)[t]$ алгебрасынан гомоморфизмін анықтайтын болады, егер $\Delta(t) = t't''$ болса. Δ ,$GL(2)$ тобының бейнелеуіне дейін бөлшектенетінін көрсету үшін, $\Delta(((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl)) - 1)$ ұмтылады 0 екендігін көрсетсек жеткілікті. Лемма 3 және $GL(3)^{\otimes 2}$ алгебрасының анықтамасынан біз

$$\Delta(((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))t - 1) = ((a'e'm' + b'h'g' + d'l'c') - (c'e'g' + d'b'm' + a'h'l'))$$
$$((a''e''m'' + b''h''g'' + d''l''c'') - (c''e''g'' + d''b''m'' + a''h''l''))t't'' - 1 = 1 \cdot 1 - 1 = 0.$$

аламыз.

Енді біз $GL_3(A)$ және $SL_3(A)$ топтарының бірліктеріне сейкес келетін

$$\varepsilon : GL(3) \to k \text{ және } \varepsilon : SL(3) \to k,$$

алгебралар бейнелеуін және

$$S : SL(3) \to SL(3) \text{ және } S : GL(3) \to GL(3)$$

сол топтың кері элементін алатын гомоморфизмдерін енгіземіз. Бұл бейнелеу келесі формулалармен анықталады

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(e) = \varepsilon(m) = \varepsilon(t) = 1, \qquad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = \varepsilon(h) = \varepsilon(d) = \varepsilon(g) = \varepsilon(l) = 0,$$

$$S(a) = ((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} e & h \\ l & m \end{pmatrix},$$

$$S(b) = -((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} d & h \\ g & m \end{pmatrix},$$

$$S(c) = ((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} d & e \\ g & l \end{pmatrix},$$

$$S(d) = -((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} b & c \\ l & m \end{pmatrix},$$

$$S(e) = ((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} a & c \\ g & m \end{pmatrix},$$

$$S(h) = -((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ g & l \end{pmatrix},$$

$$S(g) = ((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1} \begin{pmatrix} b & c \\ e & h \end{pmatrix},$$

$$S(l) = -((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1}\begin{pmatrix} a & c \\ d & h \end{pmatrix},$$

$$S(m) = ((aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl))^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},$$

және $S(t) = t^{-1} = (aem + bhg + dlc) - (ceg + dbm + ahl)$. Біз оларды ыңғайлы әрі түсініктірек түрде көшіріп жазамыз.

$$\varepsilon\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ g & l & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Abe E. Hopf Algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
2. Serre J. –P. Lie Algebres and Lie Groups. New York-Amsterdam:W. A. Benjamin, Inc., 1965.
3. Sweedler M. Hopf Algebras. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969.