ӘОЖ 517. 956

БІРСИНГУЛЯРЛЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ТУРАЛЫ

Токчараева Асел Бейсенқызы
asel_beisenkizi@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің магистранты,
Нур-Султан,Қазақстан
Ғылыми жетекшісі− Байбурин М.М

Бұл мақалада бір сингулярлы интегралдық теңдеулер қарастырылып, сол теңдеудегі интегралдық операторларға қатысты тұжырымдар дәлелденеді. Оған қоса бір сингулярлы интегралдық теңдеудің шешімінің бар екендігі және оның жалғыздығы да көрсетіледі.

Келесі интегралдық теңдеуді қарастырайық:

$$\varphi(z) - q(z)\Pi\varphi(z) = f(z)$$

$$|q(z)| \le q_0 < 1 \qquad (1)$$

мұндағы

$$\Pi\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(s)}{(s-z)^2}\,dG_s \quad ,(2)$$

$$z = x + iy,\ z \in E \qquad s = \xi + i\eta,\ s \in G, \qquad G \subset E$$

сингулярлы интегралдық оператор, Е комплекс жазықтық, $q(z)$ үзіліссіз функция, ал $\varphi, f \in P_1(G)$. $P_1(G)$ арқылы $C_0^\infty(G)$ шексіз диффференциалданатын финитті функциялар жиынын

$$\|u\| = \sup_{z\in\bar G}\iint_G \frac{|u(s)|}{|s-z|}dG_s \tag{3}$$

нормасы бойынша толықтырғанда шығатын Банах кеңістігін белгілейміз. [1]

Лемма 1. П операторы $P_1(G)$ кеңістігінде сызықтық шенелген оператор болады.

Дәлелдеуі: $\forall f \in P_1(G)$ элементін алсақ

$$\|f - f_n\|_{P_1(G)} \to 0, \quad n \to \infty$$

орындалатын $f_n \in C_0^\infty(G)$ тізбегі табылады. Онда

$$\|\Pi f_n\|_{P_1(G)} = \sup_{z\in\bar G}\iint_G \frac{|\Pi f_n(s)|}{|s-z|}dG_s = \sup_{z\in\bar G}\iint_G \frac{1}{|s-z|}\left|\iint_G \frac{f_n(t)}{(t-s)^2}\,dG_t\right|dG_s \le$$

$$\le \sup_{z\in\bar G}\iint_G |f_n(t)|dG_t \iint_G \frac{dG_s}{|s-z||t-s|^2} \le \sup_{z\in\bar G}\iint_G \frac{C\cdot|f_n(t)|}{|t-z|}dG_t = C\|f_n\|_{P_1(G)}\,.$$

Соңғы теңсіздік Адамар теңсіздігі ([2], 40-бет). Шыққан теңсіздікте шекке көшу арқылы қажет тұжырымды аламыз.

Енді (1) теңдеудің жалғыз шешімі бар болатынын көрсетейік. И.Н Вэкуа $2-\delta < p < 2+\delta$ болғанда (δ -өте аз сан) сығып бейнелеу әдісі арқылы L_p кеңістігінде жалғыз шешімнің бар екендігін көрсеткен болатын. Дәл осындай нәтижені $L_p(G), \quad (p>2)$ кеңістіктері үшін В.С.Виноградов өзінің мақаласында алды[3]. Біз осы мақаладағы әдісті қолданамыз. $p>2$ болғанда $L_p(G)$ кеңістіктері $P_1(G)$ кеңістігіне енгізілетінін ескерте кетейік.

Теорема1. $I - q\Pi$ операторы $P_1(G)$ кеңістігінде Нетер операторы болады, мұндағы I– бірлік оператор.

Бұл теорема аталған оператор үшін оң және сол регулизаторлар құру арқылы дәлелденеді. ([4], 6.2.1. теорема)

Теорема 2. $I - q\Pi$ операторының индексі нөлге тең.

Мұны дәлелдеу үшін $A(\lambda) = I - \lambda q\Pi.,\quad \lambda \in [0,1]$, операторлар тобы гомотопия болатынын көрсетеміз. Ал одан 6.3.4.теорема ([4]) бойынша

$$Ind(I - q\Pi) = Ind A(1) = Ind A(0) = Ind\, I = 0$$

болатыны шығады.

Осы екі теоремадан $I - q\Pi$ операторының Фредгольм операторы болатынын аламыз. Ал Фредгольмның бірінші теоремасы бойынша (1) теңдеудің шешімі бар және жалғыз болуы үшін сәйкес біртекті теңдеудің тек нөлдік шешімі болуы қажетті және жеткілікті. Сондықтан мына тұжырымды дәлелдейміз.

Теорема3. $I - q\Pi$ операторының ядросы тек нөлдік элементтен тұрады.

Дәлелдеу жолы : (1) теңдеуге сәйкес біртекті теңдеуді қарастырамыз:

$$\varphi(z) - q(z)\Pi\varphi(z) = 0 \tag{1'}$$

Онда $\varphi \in P_1(E)$ үшін $u(z) = \mathrm{T}\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(s)}{s-z}dG_s \in C(E)$ функциясы

$$u_{\bar z} - q(z)u_z = 0 \quad z \in E, \quad |q(z)| \le q_o < 1 \tag{4}$$

Бельтрами теңдеуінің шешімі болады.
Бұдан теңдеудің жалпы шешімінің формуласы бойынша

$$u\,(z) = \mathrm{T}\varphi(z) = \Phi(\theta(z))$$

мұндағы $\theta(z) -$ Бельтрами теңдеуінің гомеоморфизмі, ал $\Phi(\theta) -$жазықтықта голоморфты болатын функция, яғни бүтін функция.

$\mathrm{T}\varphi(z)$ комплекс жазықтықта шенелген үзіліссіз функция , әрі шексіздікте нөлге айналатындықтан, $\Phi(\theta)$ функциясы шенелген және шексіздікте нөлге айналатын бүтін функция, онда Лиувилль теоремасы бойынша [2] $\Phi(\theta) \equiv 0,$ онда $\mathrm{T}\varphi(z) \equiv 0,$ бұдан $\varphi(z) = \dfrac{\partial \mathrm{T}\varphi(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ болатыны шығады, ендеше біртекті теңдеудің тек нөлдік шешімі бар болады, яғни $Ker(I - q\Pi) = \{0\}$. Жоғарыда айтқанымыздай бұдан (1) теңдеудің шешімі бар және жалғыз болатыны шығады.

Сонымен қатар Бельтрами типті эллипстік жүйе болатын

$$\partial_{\bar{z}} u + q(z)\partial_z u + a(z)u(z) + b(z)\overline{u(z)} = f\,(z) \qquad (5)$$

$$|q(z)| \le q_0 < 1$$

мұндағы

$$2\partial_z = \partial_x + i\partial_y \;,2\partial_z = \partial_x + i\partial_y \qquad (6)$$

үшін жалпы интегралдық оператордың келесі жұмыста қарастырылғанын атап өтуге болады[5].

Бұл жағдайда да сингулярлы интегралдық оператордың қасиеттері осыған дейінгі келтірілген тұжырымдамалармен сәйкес келеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций Векуа // В книге: Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979, С. 80-99.
2. Векуа И.Н Обобщенные аналитические функции−М.: Наука, 1988, 512 с.
3. Виноградов В.С. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // ДАН СССР, 1978, Т 241.- №2, С. 272-274.
4. Михлин С. Г Линейные уравнения в частных производных, −М.: «Высшая школа», 1977, 423 с.
5. Байбурин М.М Компактность основного интегрального оператора для эллиптической системы типа Бельтрами //Вестник КазГУ, серия мат.мех.инф,-1998, №12, С. 20-27.