УДК517.5

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА T_1 В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(\bar{G},\rho^\alpha)$

Конратов Бакытжан Батырович
Bahonya98@gmail.com
Студент 4 курса механико-математического факультета
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Кошкарова Б.С.

Многие задачи математической физики опираются на теорию обобщенных аналитических функций, в которых операторы вида

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z}, \Pi f=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}$$

играют ключевую роль. Эти операторы с достаточной полнотой изучены в монографии И.Н.Векуа[1] в обычных классах$L_p(\bar{G})$, $C^\alpha(\bar{G})$ и установлены основные их свойства. Поиск более широких пространств, в которых все основные свойства T и П сохранялись, увенчался успехом. Н.К. Блиевым [2] установлено, что таким является дробное пространство $B^\alpha_{p,\theta}$ при определенных соотношениях между параметрами p,α,θ, причем $1<p\leq 2$, благодаря этому результаты И.Н. Векуа полностью обобщены на функции класса $B^\alpha_{p,\theta}$ и расширились рамки их приложения. Более общую задачу поставил Отелбаев в своей работе [3]: описать такие пространства, в которых основные свойства T сохранялись, он же и получил основной результат: самым широким пространством на которое может быть распространена теория И.Н. Векуа является $\mathbb{P}_1(.)$, а среди всех симметричных пространств – пространство $\mathcal{L}(2,1)$

Лоренца. А. Игликов в работе [4] исследовал данные операторы в весовых пространствах $L_p(\bar{G},\rho^\alpha)$ и $C_{k,\lambda}^{m,\mu}(\bar{G})$и получил теоремы, обобщающие результаты, полученные И.Н.Векуа.

В данной работе мы исследовали свойства оператора $T_1 f$, имеющего вид:

$$T_1 f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{1-\bar{\zeta}z}.$$

Операторы такого вида возникают в задачах гидродинамики, таких как задачи гидродинамики для потенциальных осесимметрических движений несжимаемой идеальной жидкости, путем сведения их к эквивалентным интегральным уравнениям, содержащих такого рода интегральные операторы.

Через $L_p(\bar{G};\rho)$ (иногда $L_p(\bar{G};\rho^\alpha)$) обозначено банахово пространство функций, в котором норма элемента определяется равенством

$$\|f\|_{L_p(\bar{G};\rho^\alpha)} \equiv \|f\|_{p,\rho} = \left(\iint_G \rho^a \left|f(\zeta)\right|^p dG_\zeta\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1}$$

где весовая функция $\rho(\zeta, D)$ есть неотрицательная непрерывная функция, обращающаяся в нуль на некотором множестве D точек области $\bar{G}$. Поскольку нормы (1) для таких различных весов ρ эквивалентны, то, не теряя общности, можно положить, например,

$$\rho(\zeta) \equiv \rho_t(\zeta) \equiv \rho(\zeta,t) = \inf|\zeta - t|, \zeta \in \bar{G}, t \in D \tag{2}$$

Если D=Ø – пустое множество, то будем считать, что $\rho(\zeta) \equiv 1$. В (1) a – некоторое поятоянное действительное число. Для нас важен случай $0 < a \le 1$, что и будем предполагать.

Сразу же заметим, что если $f(\zeta) \in L_p(\bar{G},\rho)$, то $\varphi(\zeta) = \rho^{\frac{a}{p}}$, $f(\zeta) \in L_p(\bar{G})$ т.е. $f(\zeta)$ можно представить в виде

$$f(\zeta) = \rho^{-\frac{\alpha}{p}}\varphi(\zeta), \varphi(\zeta) \in L_p\left(\bar{G}\right) \tag{3}$$

причем

$$\|f\|_{p,\rho} = \|\varphi\|_p \tag{4}$$

Пусть K круг единичного радиуса. Имеет место следующая теорема

Теорема. Пусть $f(z) \in L_p(K,\rho^\alpha), 1 < p < \infty$ и $0 \le \alpha < 1, K -$ единичный круг.

Тогда, если

а) $2+\alpha > p$,то $Tf \in L_{p_1}(\bar{G};\rho^\beta)$, где p_1, $1 < p_1 < \infty$, и β удовлетворяет соотношению

$$\frac{2+\beta}{p_1} > \frac{2+\alpha}{p} - 1; \tag{5}$$

б) $2+\alpha = p$, то $Tf \in L_{p_1}(\bar{G})$, где $p_1 -$ любое конечное число и $1 < p_1 < \infty$;

в) $2+\alpha < p$, то $Tf \in C(\bar{G})$.

Доказательство.

Используя неравенство Гёльдера, находим

$$\left|T_1 f\right| = \frac{1}{\pi}\left|\iint_K \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta} z} d\xi d\eta\right| = \frac{1}{\pi}\left|\iint_K \frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}-z\right)} d\xi d\eta\right| = \frac{1}{\pi}\left|\iint_K \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\iint_K |\varphi(\zeta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_K \frac{|\zeta|^q}{|\zeta - t|^{\frac{\alpha q}{p}} |\zeta - z|^q} d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\pi} \| \varphi \|_{L_p} \left(J\left(\frac{\alpha q}{p}, q\right)\right)^{\frac{1}{q}},$$

где интеграл

$$J(\frac{\alpha q}{p}, q) = \iint_K \frac{|\zeta|^q}{|\zeta - t|^{\frac{\alpha q}{p}} |\zeta - z|^q} d\xi d\eta.$$

Оценка данного интеграла была полученаИ.Н.Векуа в работе [1]:

$$J(\alpha,\beta) \le \begin{cases} M'_{\alpha,\beta}\left|z_1 - z_2\right|^{2-\alpha-\beta} & при \quad \alpha+\beta > 2 \\ M''_{\alpha,\beta}(G) + 8\pi\left|\lg\left|z_1 - z_2\right|\right| & при \quad \alpha+\beta = 2, \\ M'''_{\alpha,\beta}(G) & при \quad \alpha+\beta < 2 \end{cases}$$

На основании данной оценки, полагая, что $\alpha = \frac{\alpha}{q}$, а $\beta = q$, тогда $2-\alpha-\beta = 2 - \frac{\alpha q}{p} - q = 2 - \frac{\alpha p}{p(p-1)} - \frac{p}{p-1} = \frac{p-2-\alpha}{p-1}$ и $\left(2 - \frac{\alpha q}{p} - q\right)/q = \frac{p-2}{p}$, находим

$$\left|T_1 f\right| \le C \| f \|_{L_{p,\rho}} \begin{cases} |z-t|^{\frac{p-2-\alpha}{p}} & при \quad 2+\alpha > p, \\ \left|\lg|z-t|\right| & при \quad 2+\alpha = p, \\ 1 & при \quad 2+\alpha < 1, \end{cases} \tag{6}$$

где постоянная C зависит только от p и α в первом случае.

При $2+\alpha > p$ имеем

$$\left(\iint_K \rho^\beta \left|T_1 f\right|^{p_1} dK\right)^{\frac{1}{p_1}} \le C \| f \|_{L_{p,\rho}} \left(\iint_K |z-t|^\beta |z-t|^{\frac{p-2-\alpha}{p}} dK\right)^{\frac{1}{p_1}}. \tag{7}$$

Отсюда при $\beta + \frac{p-2-\alpha}{p} > -2$, т.е. при выполнении соотношения (5), интеграл в правой части будет конечен[4], т.е.

$$\| \mathrm{T}_1 f \|_{L_{p_1,\rho}} \le C_1 \| f \|_{L_{p,\rho}},$$

где C_1 по-прежнему зависит от p и α. Таким образом, доказано утверждение а). А утверждения б) и в) следуют из оценки (6).

Список использованных источников

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М: Наука, 1988. – 512 с.
2. Блиев А.К. Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. – Алматы: Наука, 1985. – 160 с.
3. Отелбаев М.О. К теории обобщенных аналитических функций И.Н. Векуа // В сб. «Применение методов функционального анализа к задачам матем. Физики и вычисл. Математики». – Новосибирск, 1979. – С.80-99.
4. Игликов А. Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. – Алматы: Ғылым, 1995. – С. 157-190.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.- 255 с.