ӘОЖ 372

МЕКТЕП КУРСЫНДА КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ

Итенова Азиза Жантөрекқызы
aziza.itenova.98@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университетінің 4 курс студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші-К.Ш.Бейсенбаева

Бұл тақырып 11-сыныпта оқытылады.Бұл тақырып бойынша меңгерген білім мен дағдыларды қолдану ҰБТ-ны тапсырған кезде өте қажет,тақырып қарапайым болып көрінгенімен білім алушыларға қиындық тудырады.Көбінесе ережелерді,теорияларды білмеу,сондай-ақ тақырып бойынша тапсырмалардың әртүрлілігі барлық оқушыларға олардың шешімін көруге мүмкіндік бермейді.

Негізгі мақсатымыз – білім алушыларды көрсеткіштік және логарифмдік функциямен таныстыру және өрнектерді түрлендіріп,қасиеттерін пайдаланып теңдеу мен теңсіздік есептерін шығара білуге үйрету,оқушылардың сабаққа деген құштарлығын арттыру, есте сақтау қабілетін дамыту.

Оқушылардың көбісі көрсеткіштік және логарифмдік функциялардың анықталу облысын, мәндер жиынын анықтауды білмейді. Соның салдарынан ары қарай шығарған есептерінің жауаптары дұрыс шықпайды. «*Математиканың түсінікті болған 10 беті, түсінбей жаттап алған жүз беттен артық, ал өздігінен оқып игерген бір сәт, әйтеуір түсінікті он беттен артық*» деп ағылшын ғалымы Юнг айтып кеткендей,оқушыларға ең алдымен анықталу облысын, мәндер жиынын анықтауды жақсылап меңгерту қажет. Одан кейін графигін салуды меңгерту қажет. Осы бастапқы түсініктерді оқушыларға жақсы меңгертетін болсақ, одан кейінгі көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер, теңсіздіктер,

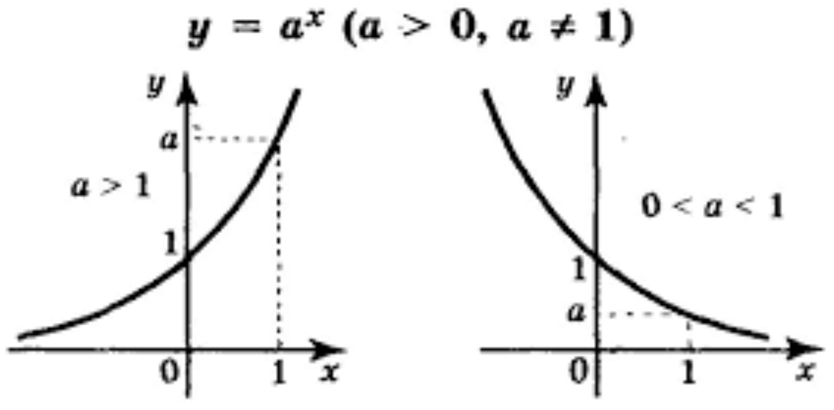
теңдеулер жүйесі, теңсіздіктер жүйесі, туынды,алғашқы функцияларын анықтауды меңгерту жеңіл болады. Логарифмнің қасиеттерін жақсылап меңгерту қажет. Мектеп курсында логарифмдік теңдеу мен теңсіздіктердің қарапайым, дербес жағдайлары ғана қарастырылады. Логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктерді қандай жолмен шығарсақ та есептің дұрыс шешілуі олардың қасиеттерін дұрыс қолдана білуге байланысты.
Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді түрлендіруде олардың анықтамасын, негізгі қасиеттерін білу керек.

Анықтама**.** $y = a^x \left(a > 0, a \neq 1\right)$формуламен берілген функция негізі a болатын көрсеткіштік функция деп аталады.

Көрсеткіштік функияның негізі қасиеттерін тұжырымдап берейік:

1. Анықталу облысы-нақты сандар жиыны R .
2. Мәндерінің облысы - бүкіл оң нақты сандардың $R_+ \left(0;+\infty\right)$жиыны.
3. $a > 1$болғанда функция бүкіл сан түзуінде өседі; $0 < a < 1$болғанда функция R жиынында кемиді.
4. Функция жұп та, тақ та емес.
5. Функция периодты емес.
6. Функция төменнен шектелген, $y > 0$
7. Функцияның ең үлкен, ең кіші мәні де жоқ.
8. $\left(0;1\right)$ – функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктесі.
9. Егер $a^{x_1} = a^{x_2}$ тең болса, $x_1 = x_2$ тең.

Теорема. $a > 0, a \neq 1$ және $b > 0$ болатын, кез келген қос нақты a мен b сандары үшін $a^x = b$ теңдігі орындалатын x нақты саны табылады және ол жалғыз болады.



Сурет 1

Көрсеткіштік функцияға мысалдар қарастырайық:

1. Теңдеуді шешіңіз: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Теңдеудің екі жағын да нөлден өзгеше 36^x санына бөлсек,

$$3\cdot\left(\frac{16}{36}\right)^x+2\cdot\left(\frac{81}{36}\right)^x=5$$

$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x=5$ теңдеуін аламыз. Белгілеу енгізіп, $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y$ мынадый теңдеу алдық: $3y+\frac{2}{y}=5$

$3y^2-5y+2=0$. Алынған квадраттық теңдеуді шешіп, $y_1=1, y_2=\frac{2}{3}$ түбірлерін аламыз. Сәйкесінше, $\left(\frac{4}{9}\right)^x=1, x_1=0; \left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{2}$

Жауабы: $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}$

2. Теңдеуді шешіңіз: $\sqrt{5-x}\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)=0$

Теңдеудің мүмкін мәндер жиыны $5-x\geq 0\Rightarrow x\leq 5$. Теңдеу x-тің осындай мәндерінде $\sqrt{5-x}=3^{x^2-7,2x+3,9}=9\sqrt{3}$ теңдеулер жиынтығымен мәндес болады. Бірінші теңдеуден $x_1=5$ Екінші теңдеуді шешу үшін теңдіктің оң жағын түрлендіреміз: $9\sqrt{3}=3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{2,5}$

Осылайша екінші теңдеу: $x^2-7,2x+3,9=2,5, x^2-7,2x+1,4$ теңдеуімен мәндес болады. Бұл жерден, $x_2=\frac{1}{5}, x_3=7$ ММЖ – ын ескерсек, жауабы: $x_1=\frac{1}{5}, x_2=5$

3. Теңдеуді шешіңіз: $|x-2|^{x^2-2x}=|x-2|^{5x-10}$

Келесі жүйенің шешімі теңдеудің түбірлері болады: $\begin{cases}|x-2|>0\\ |x-2|\neq 1\\ x^2-2x=5x-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 3, x\neq 1\\ x^2-7x+10=0\end{cases}$

және $|x-2|=1$ теңдеуінің шешімі болуы мүмкін. $x^2-7x+10=0$ теңдеуінің екі түбірінен жүйенің бір ғана $x=5$ шешімі болады. Ал шарт бойынша, $|x-2|=1$ теңдігі $x=1, x=3$ түбірлерін қанағаттандырады, сондай – ақ бұл түбірлер жүйенің шешімі болып табылады. Өйткені, x – тің осы мәндерінде $x^2-2x, 5x-10$ функциялары анықталған. Сонымен жауабы: $x=1, x=3, x=5$

Логарифмдік функция

Қандай да бір а санын x дәрежеге шығару арқылы алынған b санын

$$a^x=b \qquad (1)$$

теңдеуі түрінде жазуға болады, мұндағы a және b -берілген сандар, ал x -белгісіз шама. Бұл теңдеу әр уақытта шығарыла бермейді. Мысалы, a саны оң, ал b саны теріс болса, онда (1) теңдеудің шешімі жоқ, себебі көрсеткіштік функция әр уақытта нөлден үлкен: $a^x > 0$ Ал егер a және b оң сандар және $a \neq 1$ болса, онда (1) теңдеудің түбірі бар және ол біреу ғана: $x = \log_a b$

Анықтама. b саны шығу үшін a негізі шығарылатын x дәреже көрсеткішін b санының a негізі бойынша логарифмі деп атайды. $\log_a b = x$ жазуы негізі a болатын b санының логарифмі $x-$ ке тең деп оқылады.

Мысалы. Негізі $5-$ке тең $25{,}625$ және $\frac{1}{125}$ сандарының логарифмін табайық.

Шешуі. Негізі 5 болатын 25 санының логарифмі $2-$ге тең, себебі $5^2 = 25$ немесе $\log_5 25 = 2$

Негізі 5 болатын 625 санының логарифмі $4-$ке тең,себебі $5^4 = 625$ немесе $\log_5 625 = 4$

Негізі 5 болатын $\frac{1}{125}$ санының логарифмі $3-$ке тең ,себебі $5^{-3} = \frac{1}{125}$ немесе $\log_5 \frac{1}{125} = -3$

Жауабы: $2;4;-3$

Санның логарифмінің анықтамасынан

$$a^{\log_a b} = b \qquad (2)$$

теңдігі шығады. (2) теңдікті логарифмнің негізгі тепе-теңдігі деп атайды.

Анықтама. $y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)(3)$ формуласымен берілген функцияны негізі a болатын логарифмдік функция деп атайды.

Логарифмдік функцияның негізгі қасиеттерін атап өтейік:

1. Логарифмдік функцияның анықталу облысы – барлық оң сандар жиыны R. яғни $D(\log_a x) = R_+$. Шынында да, әрбір оң x санының a негізі бойынша логарифмі болады.

2. Логарифмдік функцияның мәндерінің облысы - барлық нақты сандар жиыны R.

3. Логарифмдік функция бүкіл анықталу облысында $a > 1$ болғанда өседі, $0 < a < 1$ болғанда кемиді.

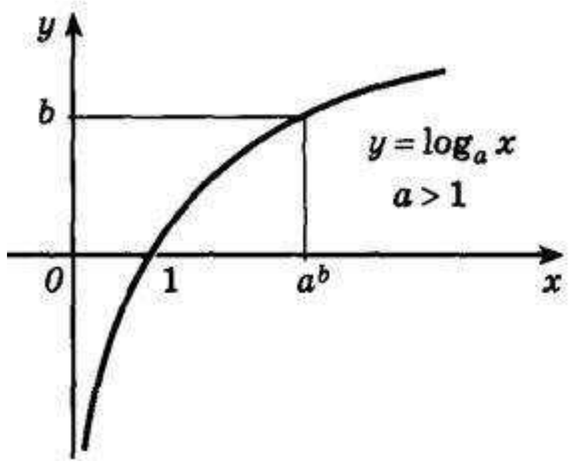
4.Функция жұп та, тақ та емес.

5.Функция периодты емес.

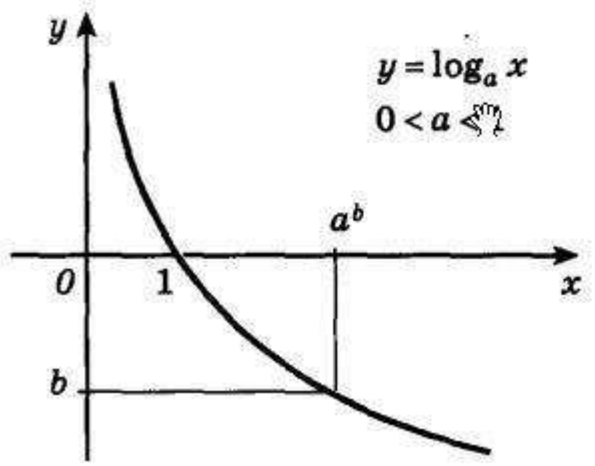
6.Функция жоғарыдан да, төменнен де шектелген.

7.Функцияның ең үлкен, ең кіші мәні де жоқ.

8. $(0;1)-$ функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктесі.



$a > 1$болғанкездефункцияанықталуаймағындаөседі;



$0 < a < 1$болған кезде функция анықталу аймағында кемиді.

Логарифмнің қасиеттері.

1) негізі а (а кез келген оң сан) болатын а санының логарифмі бірге тең:

$$\log_a a = 1$$

2) негізі 1 болатын бір санының логарифмі нөлге тең:

$$\log_a 1 = 0$$

3) екі немесе бірнеше оң сандардың көбейтіндісінің логарифмі көбейткіштердің логарифмдерінің қосындысына тең:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

4) қатынастың немесе бөлшектің логарифмі алымының логарифмі мен бөлімінің логарифмінің айырымына тең:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

5) дәреженің логарифмі дәреже көрсеткішін дәреже негізінің логарифміне көбейткенге тең:

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

6) жаңа негізге көшу формуласы:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Логарифмдік теңдеулерді шешудің бірнеше әдістері бар:

1. Логарифмнің анықтамасын қолдану арқылы шығарылатын теңдеулер.

Мысал. $\log_x\left(x^3-5x+10\right)=3$ теңдеуін шешейік.

Шешуі: Логарифмнің анықтамасы бойынша $x^3-5x+10=x^3$, онда бұл теңдеудің шешімі $x=2$.

Табылған айнымалының мәнін теңдеуге қойып тексереміз:

$$\log_2\left(2^3-5\cdot 2+10\right)=\log_2 8=\log_2 2^3 = 3\log_2 2=3$$

Демек, $x=3$ мәні теңдеуді қанағаттандырады. Жауабы: $x=2$.

2. Потенциалдауды қолдану арқылы логарифмдік теңдеулерді шешу. Жаңа айнымалы енгізу әдісі. Мүшелеп логарифмдеу әдісі

$\lg\left(x+5\right)-\lg\left(x^2-25\right)=0$

$\lg\frac{x+5}{x^2-25}=\lg 1$

$\frac{x+5}{x^2-25}=1$

$x+5=x^2-25$

$x^2+x+30=0$

$x=5, x=-6$

3. Жаңа айнымалы енгізу әдісі.

$\log_2^2 x+\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$

$t^2+t-2=0$

$x_1=-2, x_2=1$

4. Мүшелеп логарифмдеу әдісі.

$x^{\log_2 x - 2} = 8$ теңдеуін шешейік.

Шешуі:

Берілген теңдеуді былай жазайық: $x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8$ немесе $x^{\log_2 x} = 8x^2$

Шыққан теңдеуді негізін 2 – ге тең етіп логарифмдейік:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2$$
$$\log_2^2 x = 3 + 2\log_2 x$$
$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$$

Демек,

1) $\log_2 x = 3$, осыдан $x_1 = 8$

2) $\log_2 x = -1$, осыдан $x_2 = \frac{1}{2}$.

Тексеру:

1) $8^{\log_2 8 - 2} = 8$ немесе $8^{3-2} = 8{,}8 = 8$.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 \frac{1}{2} - 2} = 8$ немесе $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8{,}8 = 8.$.

Жауабы: $x_1 = 8, x_2 = \frac{1}{2}$.

Біз бұл мақалада Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектер және оларды түрлендіру,теңдеу мен теңсіздіктерін шешу тақырыбы туралы нақты мәліметтер мен анықтамалар осыған қоса формулаларды бердік. Оларды шешу әдістерін көрсеттік. Біз осы жазған мақаламыздың берілген мақсатына жеттік деп ойлаймыз.Қорыта келгенде оқу үрдісінде әр түрлі тәсілдерді пайдалану сабақтың сапасын арттыруға,оқушылардың белсенділігін,пәнге деген қызығушылығын қалыптастыруға,ең негізгісі-оқушылардың білім сапасының артуына апаратын бірден-бір жолы деп түсінемін.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. А.Шыныбеков.Алгебра және анализ бастамалары. 11-сыныпқа арналған оқулық. Алматы «Атамұра» 2007ж.
2. А.Колмогоров. Алгебра және анализ бастамалары 10-11 сыныпқа арналған оқулық. «Рауан» Алматы 1998ж.
3. А.Әбілқасымова. Алгебра және анализ бастамалары 10 сыныпқа арналған оқулық. «Мектеп» Алматы 2009ж.
4. А.Әбілқасымова Алгебра және анализ бастамалары 11 сыныпқа арналған оқулық. «Мектеп» Алматы 2007ж.