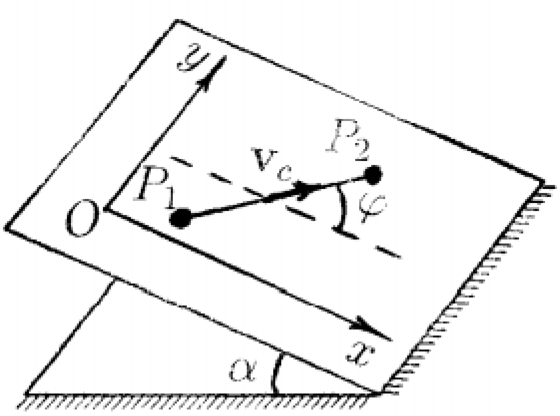
ӘОЖ 621.1

ШАНАНЫҢ ГОЛОНОМДЫ ЕМЕС ҚОЗҒАЛЫСЫ

Өмірзақова Сағыныш Сабырқызы, Несіпбек Алан Жаныбекұлы
sakonti2000@mail.ru, nesipbek99@list.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ механика-математика факультетінің студенттері
Ғылыми жетекшісі - т.ғ.к., доцент Б.Бостанов

Мәселенің қойылымы. Жазықтыққа α бұрыш жасай көлденең орналасқан жазық мұз бетімен сырғанайтын шана қозғалысын қарастырамыз (1-сурет). Үйкеліс ескерілмейді. Шана өз табандарына перпендикуляр бағытта сырғанай алмайды, сондықтан бұл голономды емес жүйе болады. Қарастырып отырған шананың механикалық моделі ретінде өзара ұзындығы ℓ болатын стерженьмен байланысқан, ал массалары P_1 және P_2 болатын екі материалдық нүктені аламыз. Стерженнің ортасы C нүктесінде шананың массалар центрі орналасқан. Қозғалыс кезінде массалар центрінің $\overline{\vartheta_C}$ жылдамдығы стержень бойымен бағытталады.



1-сурет. Көлбеу жазықтықтағы шананың моделі

Материалдар және нәтижені талдау. O_{xy} жазықтығында қозғалатын P_1 және P_2 нүктелерінің координаталарын (x_1, y_1) және (x_2, y_2) деп белгілейміз. Ox осін ең үлкен көлбеулік сызық бойымен бағыттаймыз.

Байланыс теңдеулерін жазамыз:

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \\ &(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(y_2 - y_1) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Көбейткіштері λ мен μ болатын бірінші текті Лагранж теңдеулері

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - 2\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) \\ &m\ddot{y}_1 = -2\lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) \\ &m\ddot{x}_2 = mg\sin\alpha + 2\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) \\ &m\ddot{g}_2 = 2\lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

түрінде өрнектеледі.

Жаңа айнымалыларға келсек, x координатасы, y масса центрі және φ бұрышы, ол OX осі бар өзекшені құрайды. Сонда

$2x = x_1 + x_2, \quad 2y = y_1 + y_2 \quad (y_2 - y_1) = tg\varphi(x_2 - x_1)$

Байланыс теңдеуі (1) келесі түрде жазылады:

$$\dot{y} = tg\varphi\dot{x} \qquad (3)$$

(2) - (3) теңдіктерінен қарапайым есептеулерден кейін жаңа айнымалылардағы қозғалыс теңдеулерін табамыз.

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \vartheta tg\varphi, m\ddot{y} = -\vartheta, \ddot{\varphi} = 0 \qquad (4)$$

Мұнда жазуды жеңілдету үшін μ орнына жаңа анықталмаған көбейткіш енгізілген $\nu = -(x_2 - x_1)\mu$

(3), (4) теңдеулерін интегралдаймыз, t = 0 деп есептейміз.

$$x=0, y=0, \dot{x}=0, \quad \varphi=0, \dot{\varphi}=\omega_0 \qquad (5)$$

Яғни,бастапқы сәтте өзек OX осінің бойында орналасқан,оның массалар центрі кордината басында орналасқан және нөлдік жылдамдыққа ие, ал өзекке бұрыштық жылдамдық ω_0 берілген.

Айта кетейік,бастапқы шарттар (5) байланыс теңдеуімен сәйкес келетінің ескереміз: берілген мәндер үшін φ және $\dot{x}$ мәндері үшін $\dot{y}$ мәні (4) теңдікпен анықталады.

Жүйенің алғашқы екі теңдеуінен ϑ алып тастау арқылы осы теңдеуді аламыз:

$$x+tg\varphi\ddot{y}=g\sin\alpha \qquad (6)$$

(3) теңдеуден:

$$\ddot{y}=tg\varphi\ddot{x}+\frac{1}{\cos^2\varphi}\dot{x}\dot{\varphi}$$

Осы өрнекті (6) теңдеуіне қойып, мына теңдеуді аламыз:

$$\ddot{x}+tg\varphi\dot{x}\dot{\varphi}=g\sin\alpha\cos^2\alpha \qquad (7)$$

Жүйенің үшінші теңдеуінен (6) бастапқы шарттарды ескере отырып, (7) біз табамыз:

$$\varphi=\omega_0 t \qquad (8)$$

Бұл мәнде φ (7) теңдеуге қойып, біз мына теңдеуге келеміз:

$$\ddot{x}+\omega_0 tg\omega_0 t\dot{x}=g\sin\alpha\cos^2\omega_0 t$$

Бұл сызықтық біртекті емес теңдеу оңай интегралданады (мысалы,еркін тұрақтылардың өзгеру әдісімен).

Бастапқы шарттарды ескере отырып, (5) біз табамыз:

$$\dot{x}=\frac{g\sin\alpha}{2\omega_0}\sin\alpha\omega_0 t \qquad (9)$$

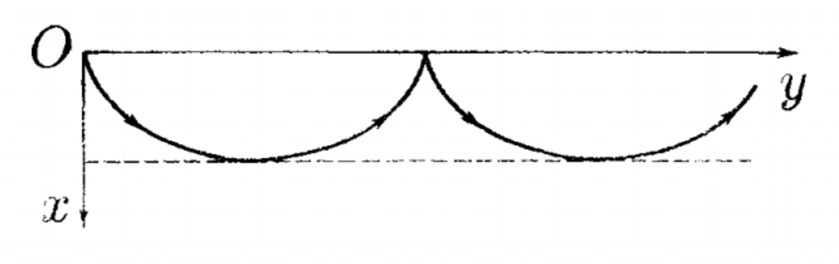
Осы жерден (3), (8)-дан бізде бар осы теңдік:

$$\dot{y}=\frac{g\sin\alpha}{2\omega_0}\sin^2\omega_0 t \qquad (10)$$

(9), (10) теңдеулерді интегралдау арқылы (5) ескере отырып, ақырында x пен y келесі тәуелділігін уақытқа қатысты аламыз:

$$x=\frac{g\sin\alpha}{4\omega_0^2}(1-\cos 2\omega_0 t) \qquad y=\frac{g\sin\alpha}{4\omega_0^2}(2\omega_0 t-\sin 2\omega_0 t) \qquad (11)$$

(10), (11) теңдіктер шананың қозғалысын сипаттайды.



2-сурет Шананың қозғалысын сипаттайды

Қорытынды. Шана олардың масса центрінің айналасында біркелкі айналады , масса центрінің өзі O_y осінде қайтару нүктелері бар циклоидты сипаттайды. Осы нүктелерде

$$t = \frac{n\pi}{\omega_0}, x = 0, y = \frac{n\pi g \sin\alpha}{2\omega_0^2} \qquad (n = 0,1,2...)$$

Бір қызығы, шама орта есеппен көлденінен жылжиды. Шананың масса центрі O_y көлденең осьтен ауытқитын максималды арақашықтық $(g \sin\alpha)/(2\omega_0^2)$ -қа тең.

(8), (11) шешімінен және жүйенің (4) алғашқы теңдеуінен голономды емес байланыстың R реакциясын табуға болады (8). $R_x, R_y - R$ -дың $\mathrm{O}_x, \mathrm{O}_y$ осіндегі проекциялары болсын.

(4) теңдеуден:

$$R_x = \nu tg\varphi = m\ddot{x} - mg\sin\alpha \qquad R_y = -\nu = m\ddot{y}$$

Осы жерге φ, x, y - тың мәндерін (8), (11) қойып,біз көбейткіш байланыстырушы ν және R_x, R_y шамаларын уақыт бойынша аламыз:

$$\nu = -mg\sin\alpha\sin 2\omega_0 t \quad , \qquad R_x = -mg\sin\alpha(1 - \cos 2\omega_0 t) ,$$
$$R_y = mg\sin\alpha\sin 2\omega_0 t$$

R реакциясы шананың масса центрінің жылдамдығына ν_C перпендикуляр және осы мәнге ие: $R = 2mg\sin\alpha[\sin\omega_0 t]$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1 А. Ғ. Ибраев, Т. Е. Санкибаев. Теориялық механика : оқулық. – Алматы : Нұр-Принт, 2016. - 287 б.

2 Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.

3 Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика саней Чаплыгина // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 219–225.

4 Смолин И. Ю. Основы аналитической динамики : (введение в аналитическую механику) : лекции / Смолин И. Ю. ; Том. гос. ун-т, ФТФ, Каф. теории прочности проектирования. - Томск, 2004. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000387205.

5 Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещёв Д.В., Теоретическая механика. М.: Издателльский центр "Академия". 2010.