УДК 517.946

БЕСІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІЛУ ШАРТТАРЫ

Мұқашева Тоғжан Дидарқызы
togjan.95.08@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 8D05401-математика мамандығының 2-курс докторанты,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Ахметкалиева Р.Д.

Бесінші ретті коэффициенттері шенелмеген сызықты дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$\tilde{L}y \equiv -y^{(5)} + r(x)y^{(3)} = f(x), \tag{1}$$

Мұндағы, $r(x)$ - үш рет үзіліссіз дифференциалданатын, шенелмеген нақты мәнді функция, $x \in R = (-\infty,+\infty)$, $f(x) \in L_2(R)$. $L_2(R)$ нормасы

$$\|\psi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

түрде анықталған Гильберт кеңістігі. (1) дифференциалдық теңдеуінің шешімін келесі мағынада іздестіреміз.

Анықтама 1. Егер $y(x)$ функциясы үшін n шексіздікке ұмтылған кезде $\|y_n - y\|_2 \to 0$ және $\|Ly_n - f\|_2 \to 0$ болатындай бес рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылатын болса, онда $y(x)$ функциясы (1) теңдеуінің шешімі деп аталады.

$C^{(k)}(R) = C^{(k)}(-\infty,+\infty)$ $(k = 1,2,...)$ - $\sum_{j=0}^{k} \sup |\psi^{(j)}(x)|$ қосындысы ақырлы болатындай және k рет үзіліссіз дифференциалданатын $\psi(x)$ функциялар жиыны болсын.

Тақ ретті сингулярлы коэффициентті дифференциалдық операторлар жартылай шенелмеген болып табылады. Сондықтан, бұндай операторлардан туындағын теңдеулерді шешімділікке зерттеудің өзіне тән қиындықтары бар. Мысалға, екінші ретті немесе жалпы алғанда жұп ретті дифференциалдық теңдеулердің энергетикалық кеңістіктері көбінесе нақты бір Соболев кеңістігінің ішкі жиыны болып табылады. Сол себепті, олардың шешілуі, шешімінің бар және жалғыз болуы пайда болған априорлық бағаның тікелей салдары болып табылады. Тақ ретті дифференциалдық теңдеулер кезінде энергетикалық кеңістіктер қандайда бір Соболев кеңістігіне енбей қалуы мүмкін. Мұндай операторлардың бөліктенуі, аппроксимативтік. спектрлік қаситтері М. Өтелбаев, М.Б. Мұратбеков, К.Н. Оспанов, Т.Т. Аманова, К.Х. Бойматов және тағы да басқа ғалымдардың жұмыстарында зерттелген [1-3].

Сингулярлы үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің бар, жалғыз болуы шарттары

$$\tilde{L}y \equiv -y''' + q(x)y = f(x) \tag{2}$$

теңдеуі үшін [4,5] жұмыстарында зерттелген. Бұл жұмыстарды зерттеу барысында енгізу теоремалары мен оператордың спектрлік теориясы пайдаланылған. Мұндағ $r \geq 1$, $x \in R = (-\infty,+\infty)$, $f(x) \in L_2(R)$.

Ly арқылы $C_0^{(5)}(R)$ компактта анықталған

$$\tilde{L}y \equiv -y^{(5)} + r(x)y^{(3)}$$

операторының $L_2(R)$ кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейік. Және төмендегідей белгілеулерді енгізейік. Айталық, g және $h \neq 0$ үзіліссіз функциялар болсын, онда:

$$\alpha_{g,h,j}(x) = \left(\int_0^x |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_x^{+\infty} t^{2j} h^{-2}(t) dt \right)^{1/2}, \ x > 0,$$

$$\beta_{g,h,j}(\tau) = \left(\int_\tau^0 g^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\tau} t^{2j} h^{-2}(t) dt \right)^{1/2}, \ \tau > 0,$$

$$\gamma_{g,h,j} = \max\left(\sup_{\{x>0\}} \alpha_{g,h,j}(x), \sup_{\{\tau>0\}} \beta_{g,h,j}(\tau)\right) \quad (j = 0,1).$$

Алынған нәтижелер келесі теорема түрінде келтіріледі.

Теорема 1. Егер $r(x)$

$$r \geq 1,\ \gamma_{1,\sqrt{r},3} < \infty \qquad (3)$$

шарттары орындалатындай үзіліссіз функция болса, онда (3) теңдеудің $y(x)$ шешімі бар және жалғыз.

Дәлелдеуі. Айталық $y(x) \in C_0^5(R)$ болсын. Және де келесі скаляр көбейтіндіні қарастырайық:

$$(\tilde{L}y, y^{(3)}) \equiv \int_R (-y^{(5)} + r(x)y^{(3)})\bar{y}^{(3)}dx \geq \int_R r(x)\left|y^{(3)}\right|^2 dx = \left\|\sqrt{r}\,y^{(3)}\right\|_2^2 . \qquad (4)$$

Гельдер теңсіздігін пайдаланып жоғарыдан бағаласақ:

$$\left|(\tilde{L}y, y^{(3)})\right| \leq \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\tilde{L}y\right\|_2 \left\|\sqrt{r}\,y^{(3)}\right\|_2 . \qquad (5)$$

Жоғарыдағы (4) және (5) теңсіздіктерінен

$$\left\|\sqrt{r}\,y^{(3)}\right\|_2 \leq \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\tilde{L}y\right\|_2 .$$

Теореманың (3) шарты және теорема 2.1 [6] бойынша

$$\|y\|_2 \leq C\left\|\sqrt{r}\,y^{(3)}\right\|_2 \leq \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\tilde{L}y\right\|_2 \leq \left\|\tilde{L}y\right\|_2 \qquad (6)$$

теңсіздігін аламыз.

Енді осы (6) теңсіздігі $y(x) \in D(\tilde{L})$ үшін орындалатынын көрсетейік. Айталық, $y(x) \in D(\tilde{L})$ - шешім болсын. Онда шешім анықтамасы бойынша

$$\|y_n\|_2 \leq \left\|\tilde{L}y_n\right\|_2 .$$

Бұдан $n \to \infty$ болғанда шекке көшіп

$$\|y\|_2 \leq \left\|\tilde{L}y\right\|_2,\ \forall y(x) \in D(\tilde{L}) \qquad (7)$$

аламыз.

Енді шешімнің жалғыз екенін көрсетейік. Айталық, y_1, y_2 функциялары (1) теңдеудің шешімдері болсын. Онда анықтама бойынша $\{y_{1n}\}_{n\geq 1}, \{y_{2n}\}_{n\geq 1} \subset C_0^{(5)}(R)$ тізбектері табылып, төмендегі қатынастар орындалады:

$$\|y_{1n} - y_1\|_2 \to 0 \text{ және } \|Ly_{1n} - f\|_2 \to 0$$

$$\|y_{2n} - y_2\|_2 \to 0 \text{ және } \|Ly_{2n} - f\|_2 \to 0 .$$

Айталық, $y^* = y_1 - y_2$ және $y_n^* = y_{1n} - y_{2n}$ болсын. Онда

$$\|y_n^* - y\|_2 \to 0 \text{ және } \|Ly_n^* - y\|_2 \to 0$$

L операторы сызықты болғандықтан

$$\|Ly_n^*\|_2 \leq \|L(y_n^* - y^*)\|_2 + \|Ly_{1n} - f\|_2 + \|Ly_{2n} - f\|_2 ,$$

$$\|Ly_n^*\|_2 \to 0 .$$

Сәйкесінше y^* үшін: $\tilde{L}y^* = 0$ бойынша $\|Ly_n^*\|_2 = 0$ немесе $\|y_1 - y_2\|_2 = 0$. Осыдан $y_1 = y_2$. Демек шешім жалғыз.

Енді шешімнің бар екенін көрсетейік, яғни $R(L) = L_2(R)$ екенін көрсетеміз. Ол үшін кері жориық, айталық $R(L) \neq L_2(R)$ болсын. Онда $s \perp R(L)$ болатындай нөлдік емес $s \in L_2(R)$ элементі табылады.. Олай болса, кез келген $y \in C_0^{\infty}(R)$ үшін $(Ly, x) = 0$. Екінші жағынан

$$(Ly, x) = \int_R y\left(s^{(5)} - (rs)^{(3)}\right)dx.$$

$C_0^{\infty}(R)$ жиыны $L_2(R)$ кеңістігінде тығыз, онда

$$s'' - r(x)s = C_1$$

$C_1 \neq 0$ болсын, онда $C_1 = 1$ деп алуға болады:

$$s'' - r(x)s = 1, \qquad x \in R.$$

Сонда шешім келесідей болады:

$$s(x) = \tilde{C}s_1(x) + \tilde{\tilde{C}}s_2(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)dt$$

Бұл жағдайда есептеулер жүргізсек $\tilde{C} = 0, \quad \tilde{\tilde{C}} = 0$. Демек

$$z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)dt$$

.

Онда $s'' = 1 - r(x)s,\ x \in R.$ Сондықтан $s(\zeta) = k > 0, \quad s(\zeta) = k > 0,$ орындалатындай $\zeta \in R$ табылады, онда

$$s - k = m(x - \zeta) + \frac{(x-\zeta)^2}{2} + \int_{\zeta}^{x}\left(\int_{\zeta}^{t} r(z)s(z)dz\right)dt \geq \frac{(x-\zeta)^2}{2}, \qquad x < \zeta.$$

Олай болса, $s \notin L_2(R)$.

$C_1 = 0$ жағдайында $z = 0$. Демек $R(L) = L_2(R)$. Бұл шешім бар екендігін береді. Теорема дәлелденді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Айткожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б., Оспанов К.Н. О разрешимости одного класса нелинейного сингулярных уравнений третьего порядка // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева. – 2005. - №6 (46). – С.10-15
2. Биргебаев А., Отелбаев М. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка // Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат. – 1984. - №3. – С. 11-13
3. Аманова Т.Т., Муратбеков М.Б. Гладкость решения одного нелинейного дифференциального уравнения // Известия АН КазССР. – 1983.–№5. –С. 4-7
4. Айткожа Ж.Ж. О гладкости и аппроксимативных свойствах решений дифференциальных уравнений нечетного порядка: дис. ... канд. физ.-мат.наук: 01.01.02.– Алма-Ата, 2003. – 75 с.
5. K.N. Ospanov, R.D. Akhmetkaliyeva Separation and the existence for second order nonlinear differential equation // Elect. J. Qual. Th. Dif. Eq.–2012.– №66.–P. 1-12.
6. Апышев О.Д., Отелбаев М. О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Известия АН СССР серия физ.-мат., 1979, т. 43, № 4, С. 739-764.