ӘОЖ 517.956

ЕКІНШІ РЕТТІ АЙЫРЫМДЫҚ БІР ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ЖАЙЛЫ

Маратқызы Ажар

azhar.maratkyzy@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің Механика-математика факультетінің іргелі математика кафедрасының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекші – Зұлхажав А.

Төменде (1) айырымдық теңдеулердің жүйесі үшін кейбір бағалаулар алынған. Бұл теңдеуің $\rho_j = 1$ жағдайы [1] –де зерттелген. (1) теңдеуінің басты ерекшелігі - оның жоғарғы ретті мүшесінде ρ шенелмеген тізбегінің болуы. Эволюциялық айырымдық теңдеулер жүйелері үшін Коши есебінің коэрцитивті шешілуі мәселесі [2] жұмысында қарастырылған.

Екінші ретті айырымдық теңдеулер

$$\left(L_0 y\right)_j = -\Delta_+\left(\rho_j \Delta_- y_j\right) + r_j \Delta_- y_j = f_j,\ j \in Z, \tag{1}$$

жүйесін қарастырайық. Мұндағы $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\rho_j > 0, r_j \ge 1$, $\Delta_- y = \{\Delta_- y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{y_j - y_{j-1}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_+ y = \{\Delta_+ y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{y_{j+1} - y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $j \in Z$.

Егер $L_0 y = \{(L_0 y)_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_- y = \{\Delta_- y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\Delta_+(\rho \Delta_- y) = \{\Delta_+(\rho_j \Delta_- y_j)\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $f = \{f_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, $\rho \Delta_- y = \{\rho_j \Delta_- y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $r\Delta_- y = \{r_j \Delta_- y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ деп белгілеулер енгізсек, онда (1) теңдеуі былай жазылады:

$$L_0 y = -\Delta_+\left(\rho \Delta_- y\right) + r\Delta_- y = f\,. \tag{2}$$

$f \in l_2$ деп есептейміз, l_2 - нормасы $\|y\|_2 = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ мәніне тең $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ элементтерінің кеңістігі. Осыдан былай $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ ($y_i \in R$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) түріндегі элементтерді де тізбек деп атайтын боламыз. $\widetilde{l}$ деп финитті тізбектер жиынын белгілейік. $\widetilde{l} = \left\{\{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \exists N, z_j = 0, |j| \ge N\right\}$. (2) шексіз айырымдық жүйесінің шешімін келесі мағынада анықтаймыз.

Анықтама. Егер $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty} \subset \widetilde{l}$ тізбегі табылып, $\left\|y^{(n)} - y\right\|_2 \to 0$, $\left\|L_0 y^{(n)} - f\right\|_2 \to 0$ ($n \to \infty$), қатыстары орындалатын болса, онда $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$ элементін (2) жүйесінің шешімі деп атайды.

Белгілі Макенхаупт [3] теоремасының тізбектер үшін [3]-те алынған бір аналогтары мынадай.

Лемма 1. Айталық $1 < p < +\infty$ болсын. Сонда

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n\sum_{k=n}^{+\infty}a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}\in\tilde{l}_+ \tag{3}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$B_0 := \sup_{r\ge 0}\left(\sum_{n=0}^{r}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=r}^{+\infty}|v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Сонымен бірге, егер C (3) бағалауы орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$B_0 \le C \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0.$$

Дәлелденген лемманы пайдалана отырып, келесі тұжырымға келеміз.

Лемма 2. Айталық $1<p<+\infty$ болсын. Онда

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|u_n\sum_{k=-\infty}^{n}a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{C}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|v_n a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \{a_k\}_{k=-\infty}^{-1}\in\tilde{l}_- \tag{4}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$\tilde{B} := \sup_{\tau<0}\left(\sum_{n=\tau}^{-1}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\tau}|v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Сонымен бірген, егер $\tilde{C}$ - (4) орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$\tilde{B} \le \tilde{C} \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}\tilde{B}.$$

L арқылы $\tilde{l}$ жиынында анықталған $L_0 y = -\Delta_+(\rho\Delta_- y) + r\Delta_- y$ айырымдық операторының l_2 кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейміз.

Теорема. $\frac{r}{\rho}=\left\{\frac{r_j}{\rho_j}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ және $\sqrt{\frac{r}{\rho}}=\left\{\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ деп белгілейік. Айталық $\frac{r_j}{\rho_j}\ge 1$ $(j\in Z)$ болсын. Онда әрбір $y\in D(L)$ үшін

$$\left\|\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\Delta_- y\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\rho}}}\,Ly\right\|_2 \tag{5}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Айталық $y=(\ldots,\,0,\,0,y_{m+1},y_{m+2},\ldots,y_{n-2},y_{n-1},0,0,\ldots)\in\tilde{l}$ болсын. $\rho_j\Delta_- y_j=z_j$ деп белгілейік. Онда $\Delta_+(\rho_j\Delta_- y_j)=\Delta_+ z_j$ және $\Delta_- y_j=\frac{1}{\rho_j}z_j\ (\rho_j>0)$, болғандықтан $-\Delta_+(\rho\Delta_- y)+r\Delta_- y=f$ теңдеуі

$$-(z_{j+1}-z_j)+\frac{r_j}{\rho_j}z_j=f_j,\ j\in Z,$$

түрінде жазылады. Соңғы теңдеудің екі жағын z_j-ге көбейтіп, нәтижесін j-лер бойынша қосындылаймыз:

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z_{j+1}-z_j)z_j+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{r_j}{\rho_j}z_j^2=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_jz_j. \qquad (6)$$

Бұл өрнектегі

$$A:=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z_{j+1}-z_j)z_j$$

қосындысы теріс екенін байқауға болады. Шынында да

$$A=\sum_{j=m}^{n-1}(z_{j+1}-z_j)z_j=\sum_{j=m}^{n-1}z_{j+1}z_j-\sum_{j=m}^{n-1}z_jz_j=$$

$$=z_nz_{n-1}+\sum_{j=m+1}^{n-1}z_jz_{j-1}-\sum_{j=m+1}^{n-1}z_jz_j-z_mz_m=$$

$$=z_nz_{n-1}+\sum_{j=m+1}^{n-1}z_j(z_{j-1}-z_j)-z_mz_m=$$

$$=z_nz_n-z_mz_m-\sum_{j=m}^{n-1}z_{j+1}(z_{j+1}-z_j).$$

Соңғы өрнек ондағы қосынды астында z_{j+1}-ге z_j–ді қосып азайтсақ, келесі түрге келеді

$$A=z_nz_n-z_mz_m-\sum_{j=m}^{n-1}z_{j+1}(z_{j+1}-z_j)-\sum_{j=m}^{n-1}z_j(z_{j+1}-z_j).$$

Осыдан түрлендіру жасап алатынымыз

$$2A=z_nz_n-z_mz_m-\sum_{j=m}^{n-1}(z_{j+1}-z_j)^2.$$

Алуымыз бойынша $z_n=z_m=0$. Демек $A\le 0$. Онда (4)-тен

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{r_j}{\rho_j}z_j^2\le\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_jz_j.$$

Гельдер теңсіздігін пайдалансақ

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{r_j}{\rho_j}z_j^2\le\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_j}{\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}z_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

немесе

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}z_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_j}{\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ y\in\tilde{l}\,.$$

(3)-ке келдік.

Енді айталық $y\in D(L)$ болсын. Онда L операторының анықтамасы бойынша $\|\tilde{y}_k-y\|_2\to 0$, $\|L_0\tilde{y}_k-Ly\|_2\to 0$ $(k\to\infty)$, қатыстарын қанағаттандыратын $\{\tilde{y}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\subset\tilde{l}$ тізбегі табылады. Және (3) бойынша

$$\left\|\sqrt{\frac{r}{\rho}}\Delta_-\tilde{y}_k\right\|_2\le\left\|\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\rho}}}L\tilde{y}_k\right\|_2,\ k\in Z\,,$$

теңсіздігі орынды. $|k|$-ны ұлғайтып шекке көшеміз. $\left|\|\tilde{y}_k\|_2-\|y\|_2\right|\to 0$, $\left|\|L_0\tilde{y}_k\|_2-\|Ly\|_2\right|\to 0$ $(k\to\infty)$ болғандықтан, сандық тізбек шегінің қасиеттері бойынша

$$\left\|\sqrt{\frac{r}{\rho}}\Delta_-y\right\|_2\le\left\|\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\rho}}}Ly\right\|_2,\ y\in D(L)\,.$$

Теорема дәлелденді.

(5)-тен теоремадағы $\frac{r_j}{\rho_j}\ge 1$ $(j\in Z)$ шарты бойынша

$$\left\|\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\Delta_-y\right\|_2\le\|f\|_2=\|Ly\|_2,\ y\in D(L), \tag{7}$$

теңсіздігі шығады.

Теорема 2. Айталық $\frac{r_j}{\rho_j}\ge 1$ $(j\in Z)$ тізбегі

$$F^*:=\sup_{n\ge 0}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\left(\frac{r_j}{\rho_j}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]<\infty, \tag{8}$$

$$F^{**} := \sup_{k<0}\left[\sqrt{-k+1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\left(\frac{r_j}{\rho_j}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty \tag{9}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y \in D(L)$ элементі үшін

$$\|y\|_2 \le C_2 \| Ly\|_2 \tag{10}$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. Айталық $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $\widetilde{l}$ жиынының элементі болсын. Онда 1 және 2 леммалары бойынша

$$\sum_{j=1}^{+\infty} y_n^2 \le 2\sup_{n\ge1} \sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{r_n}{\rho_n}}\Delta_- y_n\right)^2,$$

$$\sum_{j=-\infty}^{0} y_n^2 \le 2\sup_{n\le0}\left[\sqrt{-n+1}\left(\sum_{j=-n+1}^{-\infty}\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\sqrt{\frac{r_n}{\rho_n}}\Delta_- y_n\right)^2.$$

Бұл теңсіздіктер лемма шарттары бойынша мағыналы. Сондықтан

$$\|y\|_2^2 \le 2\sup_{k\le0}\left[\sqrt{-k+1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\sqrt{\frac{r_n}{\rho_n}}\Delta_- y_n\right)^2 +$$

$$+2\sup_{n\ge1}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{r_n}{\rho_n}}\Delta_- y_n\right)^2 \le$$

$$\le \left[2\sup_{k\le0}\left[\sqrt{-k+1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + 2\sup_{n\ge1}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\sqrt{\frac{r_j}{\rho_j}}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{r_n}{\rho_n}}\Delta_- y_n\right)^2 =$$

$$= 2\left[F^* + F^{**}\right]\left\|\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\Delta_- y\right\|_2^2,\ y \in \widetilde{l}. \tag{11}$$

Осыдан (5)-ті ескерсек, (10) бағалауына ($y \in \widetilde{l}$ үшін) келеміз.

Енді айталық $y \in D(L)$ болсын. Онда ұйғарым бойынша $\|\widetilde{y}_k - y\|_2 \to 0$, $\|L_0\widetilde{y}_k - Ly\|_2 \to 0$, $k \to \infty$, орындалатындай $\{\widetilde{y}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \subset \widetilde{l}$ тізбегі табылады. Және (11) -мен (5) бойынша

$$\|\tilde{y}_k\|_2 \le 2\left[F^* + F^{**}\right]\|L\tilde{y}_k\|_2,\ k \in Z\ .$$

$|k|$-ны ұлғайтып шекке көшеміз. Сонда ((3) теңсіздігін дәлелдегендей) сандық тізбектің шегінің қасиеттері бойынша

$$\|y\|_2 \le 2\left[F^* + F^{**}\right]\|Ly\|_2,\ y \in D(L).$$

Бұл - (10) теңсіздігі. Теорема дәлелденді.
(10) және (5) теңсіздіктерін біріктірсек

$$\|y\|_2 + \left\|\sqrt{\frac{r}{\rho}}\Delta_- y\right\|_2 \le C_3\|\ Ly\|_2,\ y \in D(L). \qquad (12)$$

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Оспанов Қ.Н., Зұлхажав А. Екінші ретті айырымдық бір теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері жайлы// Е.А. Букетов атындағы ҚарМУ жаршысы. Математика сериясы. -2015. -№2 (78), 124-136 б.
2. Cuevas C., Lizama C., Maximal regularity of discrete second order Cauchy problems in Banach spaces// J. Difference Equ. Appl.-2007. –Vol. 13(12). –P.1129–1138.
3. Muckenhoupt B., Hardy's inequality with weights// Stud. Math. -1972. -Vol. 24, No. 1. –P.31-38. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X08007543?via%3Dihub