УДК 517.5

ЖАЛПЫЛАНҒАН ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Қаркын Жұлдыз
Karkyn.zhuldyz@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика-математика факультетінің 7М05401-Метематика мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Көпежанова А.Н.

Айталық f – [0,1] кесіндісінде анықталған өлшемді функция және μ - Лебег өлшемі. f^* функциясы f функциясының өспейтін орын ауыстыруы, ол келесі түрде анықталады [1]:

$$m(\sigma, f) := \mu\{x \in [0,1] : | f(x) | > \sigma\},$$

$$f^*(t) := inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}.$$

1950 ж. Лоренц кеңістігін енгізді [1].

Айталық $1 \le p < \infty$, и $1 \le q \le \infty$. L_{pq} Лоренц кеңістігі келесі түрде анықталады:

$$L_{pq} = \left\{ f(t) : \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Егер $q < \infty$

$$\|f\|_{L_{pq}} = \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Егер $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{p\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t),$$

мұндағы $f^*(t)$ – $| f(t) |$ функциясының өспейтін орын ауыстыруы.

L_{pq} Лоренц кеңістігінің шкалалары Лебег кеңістігінің шкаласына қарағанда өте астарлы және ол дифференциалдық теңдеулерде, Фурье қатарларының теориясында, жуықтаулар теориясында, функционалдық кеңістіктер теориясында көп қолданыс табады.

Айталық $1 \le p < \infty$ болсын. Егер $p = q$ болса, онда L_{pq} Лоренц кеңістігі L_p Лебег кеңістігімен беттеседі.

Лоренц кеңістігінің негізгі қасиеттері олардың параметрлерінің иерархиялық тәуелділігі болып табылады, яғни келесі қасиеттер орындалады:

Лемма 1. ([1]) Егер $1 \le p < \infty$, $1 \le q < q_1 < \infty$ болса, онда келесі енгізу орындалады

$$L_{pq} \subset L_{pq_1} \quad (\|f\|_{L_{pq_1}} \le c\|f\|_{L_{pq}}).$$

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігін анықтайық. Айталық ω - $[0,1]$ кесіндісіндегі теріс емес функция. $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын $[0,1]$ кесіндісінде анықталған барлық f өлшемді функциялар жиыны:

егер $0 < q < \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} := \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

егер $q = \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} := \sup_{0 \le t \le 1} f^*(t)\omega(t).$$

Егер $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}$ болса, онда $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі классикалық L_{pq} кеңістігімен беттеседі [2].

Айталық $\mu = \{\mu(k)\}_{k \in \mathrm{N}}$ - оң сандар тізбегі. $\lambda_q(\mu)$ Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын барлық $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ тізбектерінің жиыны

егер $0 < q < \infty$, онда

$$\|f\|_{\lambda_q(\mu)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* \mu(k)\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

егер $q = \infty$ болса, онда

$$\|f\|_{\lambda_\infty(\omega)} := \sup_k a_k^* \mu(k) < \infty,$$

мұндағы $\left\{a_k^*\right\}_{k=1}^{\infty}$ - Ф жүйесі бойынша f функциясының $\left\{|a_k|\right\}_{k=1}^{\infty}$ Фурье коэффициенті тізбегінің өспейтін орын ауыстыруы [2], [4]-[5].

$A_\delta, B_\delta, C_\delta$ функциялар классын анықтайық:

$$A_\delta = \left\{ \begin{array}{c} \omega(t) \colon \omega(t) t^{-\frac{1}{2}-\delta} - \text{өспелі функция} \\ \omega(t) t^{-1+\delta} - \text{кемімелі функция} \end{array} \right\},$$

$$B_\delta = \left\{ \begin{array}{c} \omega(t) \colon \omega(t) t^{-\delta} - \text{өспелі функция} \\ \omega(t) t^{-(\frac{1}{2}-\delta)} - \text{кемімелі функция} \end{array} \right\},$$

$$C_\delta = \left\{ \begin{array}{c} \omega(t) \colon \omega(t) t^{-\delta} - \text{өспелі функция} \\ \omega(t) t^{-1+\delta} - \text{кемімелі функция} \end{array} \right\},$$

Онда *A, B, C,* кластары келесідей анықталады:

$$A=\bigcup_{\delta>0} A_\delta\,, B=\bigcup_{\delta>0} B_\delta\,, C=\bigcup_{\delta>0} C_\delta.$$

Теорема 1. Айталық $0<q\le q_1<\infty$ болсын. Егер $q\le q_1$ және $\omega-\mathrm{C}$ класынан болса, онда келесі кірістіру орындалады:

$$\Lambda_q(\omega)\hookrightarrow\Lambda_{q_1}(\omega).$$

Алдымен $q=+\infty$ жағдайын қарастырайық. f функциясы $\Lambda_q(\omega)$ кеңістігінен болсын. Нормасын қарастырамыз:

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)}=sup_{0<t}\,f^*(t)\omega(t)=sup_{0<t}\,f^*(t)\omega(t)(t)^{-\delta}(t)^{\delta}.$$

$\omega-\mathrm{C}$ класынан болғандықтан, $\omega(t)t^{-\delta}-$ өспелі функция болатын және $\omega(t)t^{-1+\delta}-$ кемімелі функция болатын $\delta>0$ табылады. сәйкесінше норманы келесідей бағалауға болады:

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)}\le \mathrm{c}_1\left(\int_0^t\big(f^*(x)\omega(x)\big)^q\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}}=c_1\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}.$$

Енді $q<q_1<+\infty$ жағдайын көрсетейік. fфункциясы $\Lambda_q(\omega)$ кеңістігінен болсын. Кез келген $t>0$ үшін қарастырамыз:

$$\left(\int_0^t\big(f^*(x)\omega(x)\big)^{q_1}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q_1}}=$$

$$=\left(\int_0^t\big(f^*(x)\omega(x)\big)^{q}\big(f^*(x)\omega(x)\big)^{q_1-q}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q_1}}\le$$

$$\le c_2\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{1-\frac{q}{q_1}}\cdot\left(\int_0^t\big(f^*(x)\omega(x)\big)^{q}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q_1}}\le$$

$$\le c_2\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{1-\frac{q}{q_1}}\cdot\left(\int_0^\infty\big(f^*(x)\omega(x)\big)^{q}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{q}{q_1}\cdot\frac{1}{q}}=$$

$$=c_2\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{1-\frac{q}{q_1}}\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}^{\frac{q}{q_1}}=c_1\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}.$$

Жинақтылықтың критерийі бойынша барлық бөлік интегралдар шенелген, сәйкесінше

$$\left(\int_0^{+\infty}\big(f^*(x)\omega(x)\big)^{q_1}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q_1}}<\infty.$$

және $\|f\|_{\Lambda_{q_1}(\omega)}\le c_1\|f\|_{\Lambda_q(\omega)}$, яғни $\Lambda_q(\omega)\hookrightarrow\Lambda_{q_1}(\omega)$.

Айталық $1\le\bar{q}=(q_1,q_2)\le\infty$ және $\overline{\omega}(t)=(\omega(t_1),\omega(t_2))\ge 0$, $t=(t_1,t_2)>0$ болсын. $\Lambda_{\bar{q}}(\overline{\omega})$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ облысында анықталған барлық $f(t_1, t_2)$ өлшемді функциялардың келесідей шарттарды қанағаттандыратын жиыны: егер $0 < \overline{q} < \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_{\overline{q}}(\overline{\omega})} := \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left(f^*(t_1, t_2)\omega_1(t_1)\omega_2(t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty,$$

мұндағы $f^*(t_1, t_2)$ – $f(t_1, t_2)$ функциясының өспейтін орын ауыстыруы.

Теорема 2. Егер $\overline{q} \le \overline{q}_1$ және $\omega(t)$ функциясы C класынан болса, онда келесі енгізу орындалады:

$$\Lambda_{\overline{q}}(\overline{\omega}) \subset \Lambda_{\overline{q}_1}(\overline{\omega}).$$

Жалпыланған Лоренц кеңістіктерінің бір өлшемді жағдай [2], [4], [5] жұмыстарында тереңірек зерттеліп қарастырылады. [3] жұмыста бір өлшемді жалпыланған Лоренц кеңістіктерінің Фурье қатарлары теориясындағы қолданыстары зерттелген.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Bergh J., Löfström J., Interpolation spaces. An Introduction. – Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag. – Berlin-New York. – 1976.
2. Копежанова А.Н. Неравенства типа Харди-Литтлвуда в обобщенных пространствах Лоренца. – Астана, 2011, 91 с.
3. Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д. Неравенство разных метрик в анизотропных пространствах Лоренца// вестник РУДН, №3, 2009, С. 5-11.
4. Persson L.E. An exact description of Lorentz spaces // Acta Sci. Math. – 1983. – Vol. 46. – P. 177–195.
5. Persson L.-E. Interpolation with a parameter function //Math. Scand. – 1986. – Vol. 59, № 2. – 199-222.