УДК 517.51

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ КОММУТАТОРА БИЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Жулдасов Жанат Максутович
zhanzhanzhan23@gmail.com
докторант 2-го курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научные руководители – Н.А.Бокаев, Д.Т.Матин

В данной работе приводятся условия ограниченности и компактности коммутаторов $[b, J_\alpha]_i$, $i = 1, 2$ билинейного потенциала Рисса $J_\alpha(f, g)(x)$ из обобщенного пространства Морри $M^{p_1,w_1}(R^n)\times M^{p_2,w_2}(R^n)$ в обобщенное пространство Морри $M^{q,w}(R^n)$ при соответствующих соотношениях между функциями $w,\ w_1,\ w_2$ и параметрами p_1, p_2, q.

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $1\le p\le\infty$, w измеримая, неотрицательная функция на $(0,\ \infty)$. Обобщенное пространство Морри $M_p^w\equiv M_p^w(R^n)$ определяется как множество всех функций $f\in L_p^{loc}(R^n)$ с конечной нормой:

$$\|f\|_{M_p^w}\equiv\sup_{x\in R^n,r>0} w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))},$$

где $B(x,r)$ шар с центром в точке x и с радиусом r.

Пространство M_p^w совпадает с известным пространством Морри M_p^λ при $w(r)=r^{-\lambda}$, где $0\le\lambda\le\frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, при $\lambda=0$ совпадает с пространством $L_p(R^n)$.

Для $0<\alpha<n$, потенциал Рисса $I_\alpha(f)(x)$ определяется следующим образом:

$$I_\alpha(f)(x)=\int_{R^n}\frac{f(y)}{(|x-y|)^{n-\alpha}}dy$$

Для $0<\alpha<2n$, билинейный потенциал Рисса (билинейный дробный интегральный оператор) $J_\alpha(f,g)(x)$ определяется следующим образом [1]:

$$J_\alpha(f,g)(x)=\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz$$

Говорят, что функция $b(x)\in L_\infty(R^n)$ принадлежит пространству $BMO(R^n)$, если $\|b\|_*=sup_{Q\in R^n}\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|b(x)-b_Q\right|dx<\infty$, где Q-куб из R^n и $b_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy$. Через $VMO(R^n)$ обозначим BMO-замыкание пространства $C_0^\infty(R^n)$, где $C_0^\infty(R^n)$ множество всех функций из $C^\infty(R^n)$ с компактным носителем. Для $b\in BMO$, коммутаторы билинейного потенциала Рисса $J_\alpha(f,g)(x)$ определяются следующим образом:

$$[J_\alpha,b]_1(f,g)(x)=\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{b(y)-b(x)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}f(y)g(z)\,dydz$$

$$[J_\alpha,b]_2(f,g)(x)=\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{b(z)-b(x)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}f(y)g(z)\,dydz$$

В следующих теоремах приводятся условия ограниченности билинейного потенциала Рисса $J_\alpha(f,g)(x)$ и его коммутаторов $[b,I_\alpha]_i$, $i=1,\ 2$ в пространствах Морри.

Теорема A. [2] Пусть $0 < \propto < 2n,\ 0 < \lambda, \lambda_1, \lambda_2 < n$. Пусть также $\frac{1}{2} < p < \infty,\ 1 < p_1, p_2 < \infty$ и $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ и $\frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$. Пусть $1 < q < \infty$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\propto}{n-\lambda}$. Тогда билинейный потенциал Рисса $J_\alpha(f,g)(x)$ является ограниченным оператором из $M^{p_1,\lambda_1}(R^n) \times M^{p_2,\lambda_2}(R^n)$ в $M^{q,\lambda}(R^n)$, т.е. существует $C > 0$, такое что выполняется неравенство

$$\|J_\alpha(f,g)(x)\|_{q,\lambda} \le C\|f\|_{p_1,\lambda_1}\|g\|_{p_2,\lambda_2}.$$

Теорема B. [1] Пусть $0 < \propto < 2n,\ 0 < \lambda, \lambda_1, \lambda_2 < n$. Пусть также $\frac{1}{2} < p < \infty,\ 1 < p_1, p_2 < \infty$ и $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ и $\frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$. Пусть $1 < q < \infty$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\propto}{n-\lambda}$. Тогда

1. для $b \in BMO(R^n)$ коммутаторы $[b, I_\alpha]_i,\ \ i = 1,\ 2$ являются ограниченными операторами из $M^{p_1,\lambda_1}(R^n) \times M^{p_2,\lambda_2}$ в $M^{q,\lambda}(R^n)$, т.е. существует С>0, такое что для $i = 1,\ 2$ выполняется неравенство
$$\|[J_\alpha, b]_i(f,g)(x)\|_{q,\lambda} \le C\|b\|_{BMO}\|f\|_{p_1,\lambda_1}\|g\|_{p_2,\lambda_2}$$
2. для $b \in VMO$ коммутаторы $[b, I_\alpha]_i$, i=1, 2 являются компактными операторами из $M^{p_1,\lambda_1}(R^n) \times M^{p_2,\lambda_2}(R^n)$ в $M^{q,\lambda}(R^n)$, $i = 1, 2$.

Мы рассмотрим вопрос об ограниченности и компактности коммутаторов билинейного потенциала Рисса в обобщённых пространствах Морри. Для классического потенциала Рисса такие вопросы рассмотрены в работе [3].

Приведем теорему об ограниченности оператора и коммутатора билинейного потенциала Рисса из $M^{p_1,w_1}(R^n) \times M^{p_2,w_2}(R^n)$ в $M^{q,w}(R^n)$, $i = 1,\ 2$.

Предположим, что непрерывные возрастающие функции w_1, w_2 на [0;∞) удовлетворяют следующим условиям ($j = 1,2$)

a) $w_j(0) = 0$;
b) $\lim_{r\to\infty} w_j(r) = \infty$;
c) существует константа D, удовлетворяющая условию $1 \le D < 2^n$, такая что $w_j(2r) \le D w_j(r)$ для любого $r > 0$;
d) $w(r)^{\frac{1}{p}} = w_1(r)^{\frac{1}{p_1}} \cdot w_2(r)^{\frac{1}{p_2}}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.

Теорема 1. Пусть $0 < \propto < 2n,\ 0 < \lambda < n, \frac{1}{2} < p < \frac{n-\lambda}{\propto},\ 1 < p_1, p_2 < \infty$,

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\propto}{n-\lambda}$. Пусть непрерывные возрастающие функции $w(r), w_1(r),\ w_2(r)$ удовлетворяют условиям *a)-d)* и $w(r) \le r^\lambda$ для любого $r > 0$. Тогда

1) билинейный потенциал Рисса J_α ограничен из $M^{p_1,w_1}(R^n) \times M^{p_2,w_2}(R^n)$ в $M^{q,w}(R^n)$
2) при $b \in BMO$ коммутаторы билинейного потенциала Рисса $[b, I_\alpha]_i,\ \ i = 1, 2$ являются ограниченными операторами из $M^{p_1,w_1}(R^n) \times M^{p_2,w_2}(R^n)$ в $M^{q,w}(R^n)$.

Теорема 2. Пусть $0 < \propto < 2n$, $0 < \lambda < n$, $\frac{1}{2} < p < \frac{n-\lambda}{\propto}$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\propto}{n-\lambda}$. Если w, w_1, w_2 удовлетворяют условиям *a)-d)* и $w(r) \leq r^{\lambda}$ для любого $r > 0$, $b \in VMO$, тогда коммутаторы билинейного потенциала Рисса $[b, I_{\alpha}]_i$, $i = 1, 2$ являются компактными операторами из $M^{p_1, w_1}(R^n) \times M^{p_2, w_2}(R^n)$ в $M^{q,w}(R^n)$.

При доказательстве теоремы 2 используются условия предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри, полученные в работе [4].

Список использованных источников

1. Yong Ding, Ting Mei, Boundedness and Compactness for the Commutators of Bilinear Operators on Morrey Spaces // Potential Analysis , 42(3), 2015, c728-735
2. Iida, T., Sato, E., Sawano, Y., Tanaka, H. // Sharp bounds for multilinear fractional integral operators on Morrey type spaces. Positivity **16**, 339–358 (2012)
3. Бокаев Н.А., Матин Д.Т., О достаточных условиях компактности коммутатора для потенциала Рисса в обобщенных пространствах Морри // Вестник ЕНУ, 6, 2016, С.115
4. Bokayev N.A., Burenkov V.I., Matin D.T., Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, T.4, 2016, C. 18-26