ӘОК 517.958

ХИРОТА ӘДІСІ АРҚЫЛЫ БЮРГЕРС ТЕҢДЕУІ ҮШІН СОЛИТОНДЫҚ ШЕШІМДЕРДІ АЛУ

Жамышева Әсел Әділханқызы[1],
Жумагельдина Айнұр Бақтығалиқызы[1], **Серикбаев Нұржан Сагындыкович**[2]
asikon51@mail.ru
[1]Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 8D05304 – Физика мамандығының 1-курс докторанты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2]Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, PhD, доцент м.а.
Ғылыми жетекшісі – Р. Мырзакулов

Бюргерс теңдеуі гидродинамикада, сызықты емес акустикада және плазма физикасында процестердің кең класын қарастырған кезде пайда болады. Сондай-ақ бұл теңдеу әртүрлі физикалық сипаттағы сызықты емес – диссипативті орта динамикасының сәтті моделі болып табылады.

$u(x,t)$ Бюргерс теңдеуін қанағаттандырады делік

$$u_t - u_{xx} - 2uu_x = 0. \quad (1)$$

(1)-теңдеуді дивергентті түрде жазатын болсақ,

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}(u_x - u^2) = 0 \tag{2}$$

және оның шешімі келесі түрде табылады[3]:

$$u(x,t) = 2(\ln f(x,t))_{xx}. \tag{3}$$

Бюргерс теңдеуіндегі шамаларды $f(x,t)$ функциясы арқылы өрнектейміз:

$$u_t = 2(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2}\right)),$$

$$u^2 = (2\left(\frac{f_{2x}}{f}\right) - 2\frac{f_x^2}{f^2})^2,$$

$$u_x = 2\frac{f_{3x}}{f} - 6\frac{f_{2x}f_x}{f^2} + 4\left(\frac{f_x}{f}\right)^3.$$

Осы шамаларды Бюргерс теңдеуіне қойып және $f \neq 0$ деп есептесек, келесі өрнекті аламыз:

$$2f_{xt}f^3 - 2f_{3x}f^3 - 2f_x f_t f^2 + 6f_{2x}f_x f^2 - 4f_{2x}^2 f^2 - 4f_x^3 f + 8f_{2x}f_x^2 f - 4f_x^4 = 0$$

немесе

$$f_{xt}f^3 - f_{3x}f^3 - f_x f_t f^2 + 3f_{2x}f_x f^2 - 2f_{2x}^2 f^2 - 2f_x^3 f + 4f_{2x}f_x^2 f - 2f_x^4 = 0$$

Бұл теңдеу Хиротаның бейсызықты теңдеуі деп аталады. Теңдеудің шешімін қандай да бір ε кіші параметрі бойынша ұйытқулар теориясының қатары түрінде іздейміз:

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\propto} \varepsilon^i f^{(i)} = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon f^{(2)} + \cdots \tag{4}$$

Хиротаның бейсызықты теңдеуі ε-нің бірдей деңгейлерінде бірнеше сызықты теңдеулер сериясына жіктеледі:

ε^1: $\quad 2f_{xt}^{(1)} - f_{3x}^{(1)} = 0,$

ε^2: $\quad 2f_{xt}^{(2)} - f_{3x}^{(2)} = (f_{2x})^2 - 3f_{2x}f_x + f_x f_t + 3ff_{3x} - 3ff_{xt} = 0$

…………………………………………

ε^{N+1}: $\quad 2f_{xt}^{(N+1)} - f_{3x}^{(N+1)} = \cdots\left(f^{(1)}, \dots f^{(N)}\right) = 0 \qquad (5)$

Жүйенің оң жақ бөліктерінің құрылымына сәйкес, N-нің кез келген нөмірінде (5) қатарды үзуге болады, яғни, $f^{(N+1)} = 0$ деп есептеп, $N+2, N+3, \dots$ нөмірлі теңдеулері нөлге теңестіруге болады, сондықтан

$$f^{(N+2)} = f^{(N+3)} = \cdots \equiv 0.$$

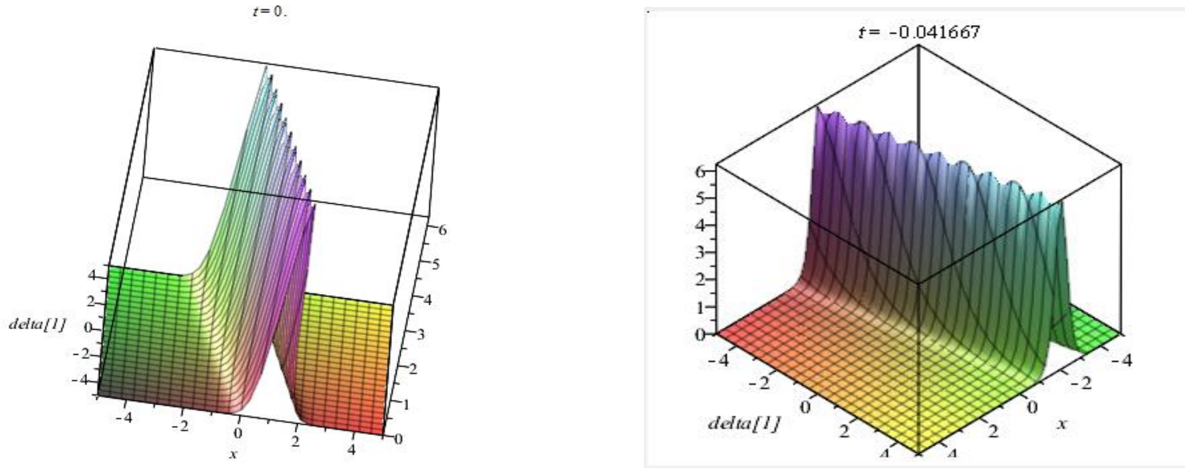
$N = 1$ мәні үшін

$$f^{(1)} = e^{\theta_i}, \qquad f = 1 + e^{\theta_i}$$

болған жағдайда Бюргерс теңдеуінің бірсолитондық шешімі мынаған тең:

$$u = \frac{a_1^2}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Төменде көрсетілген суретте Бюргерс теңдеуінің бірсолитондық шешімінің графигі көрсетілген.



1 – сурет. Бюргерс теңдеуінің бірсолитонды шешімінің графигі

$N = 2$ мәні үшін

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \qquad f^{(2)} = Ae^{\theta_1+\theta_2} \qquad f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)},$$

Бюргерс теңдеуінің екісолитондық шешімі:

$$u = 2\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{a_1e^{\theta_1}+a_2e^{\theta_2}+A(a_1+a_2)e^{\theta_1+\theta_2}}{1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+Ae^{\theta_1+\theta_2}},$$

мұндағы

$$\theta_i = a_i(x - a_i^2 t) + \delta_i,$$

$$A = -\frac{3\left(\left(a_1^4+(-\frac{1}{3}a_2+1\right)a_1^3+\left(\frac{2}{3}a_2^2-a_2\right)a_1^2+\left(-\frac{1}{3}a_2^3-a_2^2\right)a_1+a_2^3(a_2+1))\,e^{\theta_1+\theta_2}+e^{2\theta_1}a_1^4+e^{2\theta_2}a_2^4)e^{-\theta_1-\theta_2}}{(a_1+a_2)^2\left(a_1^2+(-a_2+1\right)a_1+a_2^2+a_2} \,.$$

Ұсынылып отырған мақалада Бюргерс теңдеуі қарастырылды. Хирота әдісі арқылы Бюргерс теңдеуі үшін бірсолитонды және екісолитонды шешімдер құрастырылды. Оң және теріс дисперсия кезіндегі графиктерді құру эволюциясы көрсетілді. Бұл жұмыста Maple 18 бағдарламалық пакетінде салынған 4 кесте ұсынылады.

Қолданылған әдебиет тізімі:

1. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов // Учебное пособие // Москва Ижевск, 2002, С. 21-27.
2. Петровский С.В. Журнал технической физики, 1999, том 69, вып. 8 // Точные решения уравнения Бюргерса с источником // Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117851 Москва, Россия.
3. M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, NewYork.
4. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422–443.
5. R. Hirota, Direct method in soliton theory, in: A. Nagai, J. Nimmo, C. Gilson (Eds.), Cambridge Tracts Math., vol. 155, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004
6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002 (1-е изд.), 2005 (2-е изд.).
7. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля (2-ой том курса теоретической физики) М., Наука. 1988, С. 512-590.
8. Шикин Г.Н. Основы теории солитонов в общей теории относительности. М., 1995, С. 6-70.
9. Belinski V., Verdaguer E. Gravitational solitons. 2004, С. 37-57.
10. Debojit Sarma,Mahadev Patgir, KdV solitons in Einstein’s vacuum field equations, 2010,С. 2-5