ӘОК 517.958

ХИРОТА ӘДІСІ АРҚЫЛЫ БЕСІНШІ РЕТТІ КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕҢДЕУІ ҮШІН СОЛИТОНДЫҚ ШЕШІМДЕРДІ АЛУ

Жумагельдина Айнұр Бақтығалиқызы[2],
Серикбаев Нұржан Сагындыкович[1]
Жамышева Әсел Әділханқызы[2]
ainurzhumageldina@gmail.com, serikbayev_ns@enu.kz, asikon51@mail.ru
[1]Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, PhD, доцент м.а.
[2]Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 8D05304 – Физика мамандығының 1-курс докторанты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Р. Мырзакулов

Қазіргі таңда солитондар теориясы кең ауқымда зерттелуде. Бұл солитон түсінігінің сызықты емес дифференциал теңдеулердің жүйелі тұрақты шешімдері ретінде нақты жаратылыстануда қолданылуымен түсіндіріледі. Баяндамада 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің солитондар эволюциясын зерттейміз. Атап айтқанда, Хирота әдісі арқылы 5-реттік Кортевег-де Фриз теңдеуінің бір-солитондық және және екі-солитондық шешімдерін аламыз. Аталған теңдеу келесі түрде беріледі[1]:

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{3x} + u_{5x} = 0. \qquad (1)$$

мұндағы α, β, γ тұрақты шамаларының мәні [2] $\alpha = \frac{3}{10}\gamma^2$, $\beta = 2\gamma$ қатынастарын қанағаттандырады. Берілген параметрлерге сәйкесінше төмендегі мәндер[2] таңдалынып алынды:

$$\alpha = 30, \quad \beta = 20, \quad \gamma = 10.$$

Енді (1)-теңдеуді дивергентті түрде жазатын болсақ,

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(10u^3 + 5u_x^2 + 10uu_{xx} + u_{4x}) = 0 \qquad (2)$$

(2) өрнекті аламыз. Берілген теңдеуді бисызықты түрге келтіру үшін келесі алмастыруды енгізу керек [3]:

$$u(x,t) = 2(\ln f(x,t))_{xx}. \qquad (3)$$

5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуіндегі шамаларды $f(x,t)$ функциясы арқылы өрнектейміз:

$$u_t = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2}\right),$$

$$10u^3 = 80\left(\frac{f_{xx}}{f}\right)^3 - 240\frac{{f_{xx}}^2 f_x^2}{f^4} + 240\frac{f_{xx} f_x^4}{f^5} - 80\left(\frac{f_x}{f}\right)^6,$$

$$5u_x^2 = 20\left(\frac{f_{3x}}{f}\right)^2 - 120\frac{f_{3x} f_{xx} f_x}{f^3} + 80\frac{f_{3x} f_x^3}{f^4} + 180\left(\frac{f_{xx} f_x}{f^2}\right)^2 - 240\frac{f_{xx} f_x}{f^2} + 80\left(\frac{f_x}{f}\right)^6,$$

$$10uu_{xx} = 20\left(\frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2}\right)\left(\frac{f_{4x}}{f} - 4\frac{f_{3x} f_x}{f^2} + 12\frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} - 3\frac{f_{xx}^2}{f^2} - 6\frac{f_x^4}{f^4}\right),$$

$$u_{4x} = 2\frac{f_{6x}}{f} - 12\frac{f_{5x} f_x}{f^2} + 60\frac{f_{4x} f_x^2}{f^3} - 30\frac{f_{4x} f_{xx}}{f^2} - 240\frac{f_{3x} f_x^3}{f^4} + 240\frac{f_{3x} f_{xx} f_x}{f^3} - 20\left(\frac{f_{3x}}{f}\right)^2 + 720\frac{f_{xx} f_x^4}{f^5} - 540\frac{f_{xx}^2 f_x^2}{f^4} + 60\left(\frac{f_{xx}}{f}\right)^3 - 240\left(\frac{f_x}{f}\right).^6$$

Осы шамаларды 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуіне қойып және $f \neq 0$ деп есептесек, (4)-теңдікті аламыз:

$$10f_{4x} f_{xx} f + 20f_{4x}{f_x}^2 + 2f_{6x} f^2 + 2f_{xt} f^2 - 2f_x f_t f - 40f_{3x} f_{xx} f_x + 20{f_{xx}}^3 - 12f_{5x} f_x f = 0. \qquad (4)$$

Бұл (1)-теңдеудің бисызықты түрі болып табылады. Алынған нәтижелерді қолданып, (1)-теңдеудің солитондық шешімдерін таба аламыз.Ол үшін Хирота әдісіне сәйкес f функциясын ε кіші параметрі бойынша қатарға жіктейміз [4].

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\propto} \varepsilon^i f^{(i)} = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon f^{(2)} + \cdots \qquad (5)$$

ε-нің бірдей деңгейлерінде сәйкес коэффициенттер арқылы (4)-өрнек үшін келесі теңдіктерді аламыз:

$$\varepsilon^1: \quad f_{xt}^{(1)} + f_{6x}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2: \quad f_{xt}^{(2)} + f_{6x}^{(2)} = -5f_{2x}^{(1)} f_{4x}^{(1)} - 2f^{(1)} f_{6x}^{(1)} - 2f^{(1)} f_{xt}^{(1)} + 6f_{5x}^{(1)} f_x^{(1)} + f_x^{(1)} f_t^{(1)},$$

$$\dots$$

$$\varepsilon^{N+1}: \quad f_{xt}^{(N+1)} + f_{6x}^{(N+1)} = \cdots \left(f^{(1)}, \dots f^{(N)}\right) = 0. \qquad (6)$$

Жүйенің оң жақ бөліктерінің құрылымына сәйкес, N-нің кез келген нөмірінде (5) қатарды үзуге болады, яғни, $f^{(N+1)} = 0$ деп есептеп, $N+2, N+3, \dots$ нөмірлі теңдеулерін нөлге теңестіруге болады, сондықтан

$$f^{(N+2)} = f^{(N+3)} = \cdots \equiv 0. \tag{7}$$

Хирота әдісі бойынша сызықты емес теңдеудің N -солитондық шешімі келесі түрде ізделінеді [5]:

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}, \tag{8}$$

мұндағы $\theta_i = a_i(x - a_i^2 t) + \delta_i$; $a_i, \delta_i = const.$

(1)-теңдеудің бір-солитондық шешімін алу үшін (8)-өрнектен $N = 1$ жағдайын қарастырамыз, онда

$$f = 1 + f^{(1)} \tag{9}$$

болған жағдайда 5-ретті КдФ теңдеуінің бір-солитондық шешімі мынаған тең:

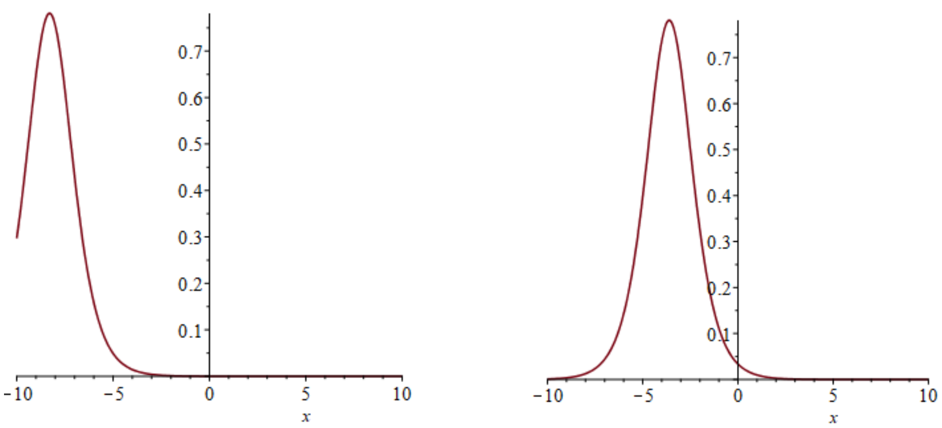
$$u = \frac{a_1^2}{2}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \tag{10}$$

мұндағы

$$\theta_1 = a_1(x - a_1^2 t) + \delta_1.$$

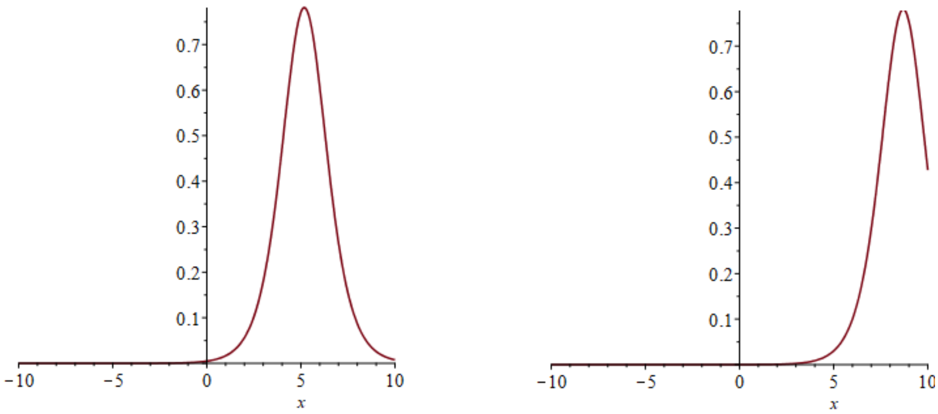
5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің бір-солитондық шешімінің графиктері 1 және 2-суреттерде көрсетілген:

$t = -2{,}75$ $\qquad\qquad$ $t = 0{,}25$



1-сурет. $a_1 = 1{,}25$ $\delta_1 = 5$ мәндеріндегі 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің шешімі

$t = 5{,}88$ $\qquad\qquad$ $t = 8{,}12$



2-сурет. $a_1 = 1{,}25$ $\delta_1 = 5$ мәндеріндегі 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің шешімі

(1)-теңдеудің екі-солитондық шешімін табу үшін (18)-өрнектен $N = 2$ болған жағдайды қарастырамыз:

$$f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)}, \tag{11}$$

мұндағы

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad f^{(2)} = Ae^{\theta_1+\theta_2}.$$

(11)-өрнекті ескеріп, 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің екі-солитондық шешімі төмендегі түрге ие:

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + A(a_1 + a_2)e^{\theta_1+\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2}}, \tag{12}$$

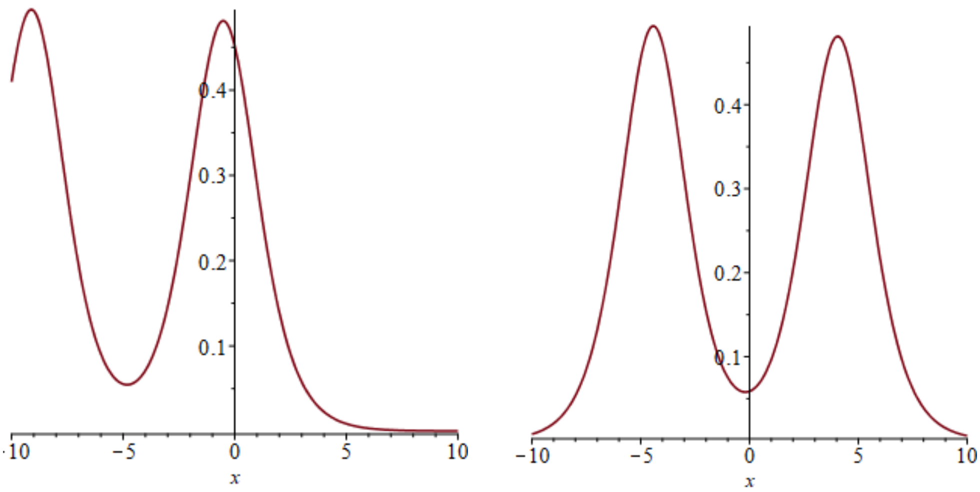
мұндағы

$$\theta_2 = a_2(x - a_2^2 t) + \delta_2,$$

$$A = -\frac{(a_1^2 - 1)a_1^4 e^{2\theta_1} + (a_2^2 - 1)a_2^4 e^{2\theta_2}}{[(a_1 + a_2)(-a_1^3 - a_2^3) + (a_1 + a_2)^6]e^{\theta_1+\theta_2}} - $$
$$- \frac{2(a_1^6 + a_2^6) - 2(3a_1 a_2 + 1)(a_1^4 + a_2^4) + a_1 a_2(5a_1 a_2 + 1)(a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 + a_2)(-a_1^3 - a_2^3) + (a_1 + a_2)^6}$$

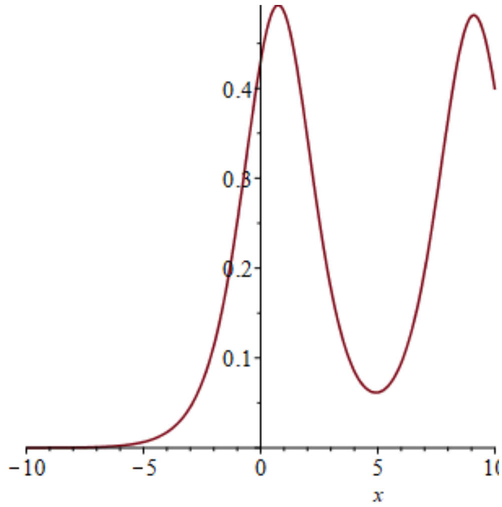
5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің екі-солитондық шешімінің графиктері 3 және 4-суреттерде көрсетілген:

$t = 0$ $\quad\quad\quad\quad$ $t = 4{,}75$



3-сурет. $a_1 = 1$; $a_2 = 0{,}98$; $\delta_1 = 8{,}75$; $\delta_2 = 7{,}75$ мәндеріндегі 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің екі-солитондық шешімі

$t = 10$



4-сурет. $a_1 = 1$; $a_2 = 0{,}98$; $\delta_1 = 8{,}75$; $\delta_2 = 7{,}75$ мәндеріндегі 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің екі-солитондық шешімі

Қорыта келгенде, баяндамада 5-ретті Кортевег-де Фриз теңдеуінің солитондар эволюциясы зерттелді, Хирота әдісінің көмегімен 5-реттік Кортевег-де Фриз теңдеуінің бір-солитондық және және екі-солитондық шешімдері алынды және графиктері тұрғызылды. Осы жұмыста Maple 17 бағдарламалық пакетінде салынған 7 кесте ұсынылып тұр.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. G. Adomian The fifth-order Korteweg-de Vries equation // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1996 Vol 19 №2. P.415
2. U. Goktas and W. Hereman. Symbolic computation of conserved densities for systems of nonlinear evolution equations // *J. Symb. Comput.* №24(5) P.591–621,
3. M Ablovic, X. Sigur Solitons and the method of the inverse problem // M.: Mir, 1987.P.199
4. R. Hirota Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons // Phys. Rev. Lett. 1971 №27, 1192
5. Новокшенов В. Ю., Введение в теорию солитонов // Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012, С. 21-24.