ӘОЖ 517.957, 532.5

ГИПЕРБОЛАЛЫҚ СИНУС-ГОРДОН ТЕҢДЕУІНІҢ СОЛИТОНДЫҚ БЕТІ

Изгалиев Избасар Базарбаевич
izbaaizgali@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университетінің
2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші –Шайхова Г.Н.

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер арасында өте маңызды болып есептелетін - гиперболалық синус-Гордон теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - sinh(u) = 0.$$

Бұл теңдеу дифференциалдық геометрияның әртүрлі есептерінде туындайды, сонымен қатар оны шешудің әртүрлі тәсілдері өткен жүз жылдықтан бері белгілі болды. Кейінірек ол релятивистік өріс теориясында қолданыла бастады [1].

Бастапқыда гиперболалық синус-Гордон теңдеуі гиперболалық қисық беттерді зерттеу үшін дифференциалды геометрияда қолданылды бастады [2]. Бірақ та ол теориялық физика үшін солитон түріндегі шешімдер табылған кезде ерекше маңызға ие болды, оның көмегімен нақты физикалық объектілерде пайда болатын әр түрлі қозуларды сипаттауға болады[3].

Гиперболалық синус-Гордон теңдеуінің солитондық шешімдері қазіргі кезде ең көп зерттелген «солитондық» теңдеулердің бірі ретінде ғылым мен техниканың әр түрлі салаларында кеңінен қолданылады [4,5]. Мысалы, геологиялық ортадағы толқындық процестерді сипаттау, нематикалық сұйық кристалдар, молекулалық биологиядағы ДНК динамикасы, магниттердегі домен шекаралары динамикасы, кристалдардағы дислокация, Джозефсон байланыстарындағы флюсондар және т.б.

Солитондық бет

Жарық конусының координатасы үшін берілген гиперболалық синус-Гордон теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - sinh(u) = 0. \tag{1}$$

Осы теңдеудің Лакс жұбы

$$X = \begin{bmatrix} -i\lambda & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} & i\lambda \end{bmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad T = \frac{1}{4\lambda}\begin{bmatrix} cosh(u) & -sinh(u) \\ sinh(u) & -cosh(u) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Сәйкес келетін $SU(2)$ тиісті X және T гиперболалық синус-Гордон теңдеуінің Лакс жұптары сәйкесінше $SU(2)$ өлшенетін келесі A және B матрицаларымен беріледі

$$A = \begin{bmatrix} -i\mu & 0 \\ 0 & i\mu \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{4\lambda^2}\begin{bmatrix} -cosh(u) & sinh(u) \\ -sinh(u) & cosh(u) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

мұндағы $A=\mu(\partial X/\partial\lambda)$, $B=\mu(\partial T/\partial\lambda)$, μ - тұрақты шама, ал λ спектралдық параметр. Содан X, T, A және B параметрлерінен шығатын солитондық бетіміз келесідей бірінші және екінші фундаментальдық формаларға ие болады $(j,k=1,2.)$

$$(ds_I)^2 \equiv g_{jk}dx^j dx^k = \mu^2 sech^2\xi\left(\left[\sqrt{k_1^2-1}-k_1\right]^2 sinh\xi dx^2+\frac{1}{\lambda^2}dt^2\right), \tag{4}$$

$$(ds_{II})^2 \equiv h_{jk}dx^j dx^k = 2\mu sech^2\xi\left(\lambda\left[k_1-\sqrt{k_1^2-1}\right]tanh\xi dx^2+\frac{1}{\lambda}\left[k_1+\sqrt{k_1^2-1}\right]dt^2\right), \tag{5}$$

осыған тиісті Гаустық және орта қисықтықтар шешімі

$$K=\frac{4\lambda^2\left(1+\sqrt{k_1^2-1}\right)^2}{\mu}, \tag{6}$$

$$H=\frac{2\lambda\left(1+\sqrt{k_1^2-1}\right)}{\mu}. \tag{7}$$

Берілген теңдеудің бір солитондық шешімін ала отырып, гиперболалық синус-Гордон бетінің орналасу векторын $\vec{y}=(y_1(x,t),y_2(x,t),y_3(x,t))$ есептейік. (1) теңдеу топологиялық солитон түріндегі бір солитондық шешімге ие болады

$$u=4arctanh\left(e^{\xi}\right), \tag{8}$$

мұнда $\xi=(t+x)\sqrt{k_1^2-1}+k_1(t-x)$. Лакс теңдеуін аламыз:

$$\Phi=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-sinh(u) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-sinh(u) & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

Беттің орналасу векторының үш параметрлік компоненттері

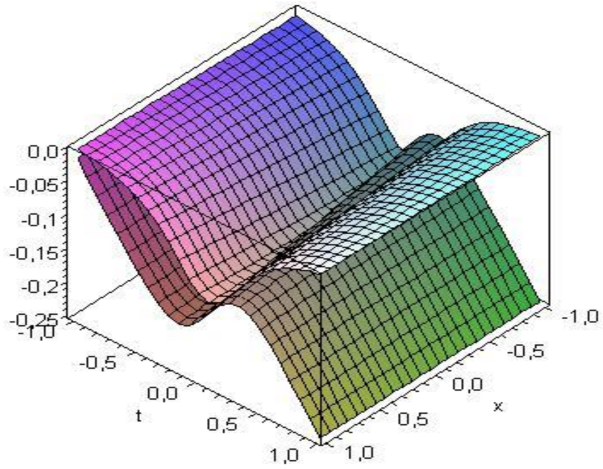
$$y_1=-\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)e^{\left(2-\sqrt{3}\right)t+\left(2-\sqrt{3}\right)x}}{e^{4x}+e^{2\sqrt{3}t+2\sqrt{3}x+4t}}, \tag{10}$$

$$y_2=-C_1,\quad C_1=const \tag{11}$$

$$y_3=-\frac{2}{\left(2\sqrt{3}+4\right)\left(1+e^{2\sqrt{3}t+2\sqrt{3}x+4t-4x}\right)}-\frac{1}{4}t \tag{12}$$

Жалпы айтқанда, y_3 және y_2 асимптоталық ыдырау функциялары болады, ал y_1 болса $\xi\to\pm\infty$ болғандықтан, ол да $\pm\infty$ ұмтылады. Кез-келген кішкентай x және t аралықтары үшін, біз кез келген беттер жиынының үш параметрі арқылы, кез келген арнайы k_1, λ, μ шамалармен солитондық бет құра аламыз.

$k_1=2$, $\lambda=1$, $\mu=-8$ тең болған кездегі (10), (11), (12) теңдеудегі үш параметрдің графигі 1-ші суретте берілген



1-сурет.(10), (11), (12) теңдеулердегі үш параметрлік шама бойынша $k_1 = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = -8$ тең болғандағы гиперболалық синус-Гордон теңдеуінің солитондық беті

Бұл жұмыста біз гиперболалық синус-Гордон теңдеуі үшін солитондық бет тұрғыздық. Фундаментальдық және қисықтық формаларын есептеп, ең негізгі үш параматрлік шаманы анықтадық. Кейін гиперболалық синус-Гордон теңдеуі үшін $(x,t) \in \lfloor -1,1 \rfloor \times \lfloor -1,1 \rfloor$ аралықтасолитондық бетті Maple бағдарламасы арқылы құрдық.

Жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947)

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. R. Parthasarthy and K. S. Viswanathan, Geometric properties of QCD string from Willmore functional, J. Geom. Phys. 38, 2002, 207-216 .
2. Tu and Z.C. Ou-Yang, A Geometric Theory on the Elasticity of Biomembranes, J. Phys. A: Math. Gen. 37, 2004, 11407-11429.
3. Hickman, M., W. Hereman, J. Larue, and U. G¨okta ¨. Scaling invariant Lax pairs of nonlinear evolution equations. Applicable Analysis, 2012, 91 (2), 381-402.
4. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory // Springer.-2009.-P.746
5. Infield, E. and G. Rowlands. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos, 2nd Ed., Cambridge University Press, 2002.