ӘОК 517.957, 532.5

АКНС ЖҮЙЕСІ ҮШІН СИНУС ӘДІСІ

Серік Ерсұлтан Нұрғалиұлы
Ersultan2021@bk.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Г.Н.Шайхова

Математикалық физиканың сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулер физиканың маңызды зерттеулер бағыты болып табылады [1] . Сонымен, сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін зерттеу физикадағы көптеген құбылыстарда маңызды рөл атқарады. Дәл шешімдерді табудың көптеген тиімді және тиімді әдістері бар, мысалы Хирота әдісі [2], Дарбу түрлендіру әдісі [3], және синус-косинус әдісі [4-6].

Бұл жұмыста АКНС-теңдеулер жүйесі зертелді [7-10]

$$iq_t - q_{xx} + 2q^2 r = 0, \tag{1}$$

$$ir_t - r_{xx} + 2r^2 q = 0, \tag{2}$$

мұндағы $q(x,t)$, $r(x,t)$ кеңістіктік координат x және t уақыттың комплекс мәнді функциялары, i комплексті сан. Бұл жұмыстың мақсаты (1)-(2) теңдеулердің кейбір жаңа нақты шешімдерін құру. (1)-(2) теңдеулерді синус әдісімен зерттейміз, ол кеңінен таралған және әртүрлі сызықты емес теңдеулерді шешуде кеңінен қолданылады.

Синус әдісінің сипаттамасы

Бұл бөлімде синус әдісін сипаттаймыз [4-6]. Синус әдісі бойынша толқындық айнымалыны келесідей түрде аламыз

$$Q(x,t) = Q(x - ct), \tag{3}$$

дербес туындылы дифференциалды теңдеуден

$$E_1(Q_t, Q_x, Q_{xx}, Q_{xxx}, ...) = 0, \tag{4}$$

қарапайым дифференциалды теңдеуге айналдырамыз

$$E_2(Q, Q', Q'', Q''', ...) = 0. \tag{5}$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеудің (4) шешімдері келесі түрде беріледі

$$Q = \lambda \sin^{\beta}(\mu\,\xi) \qquad |\xi| \le \frac{\pi}{2\mu}, \tag{6}$$

мұндағы λ, μ және β -анықталатын параметрлер, μ толқындық сан және c толқынның жылдамдығы [1]. (5)-ші теңдеудің екінші ретті туындысы келесідей болады

$$Q'' = \lambda\beta(\beta-1)\mu^2 \sin^{\beta-2}(\mu\xi) - \lambda\beta^2\mu^2 \sin^{\beta}(\mu_1\xi) \tag{7}$$

Берілген (6)-(7) теңдеулерді қарапайым дифференциалды теңдеуге (5)-ке қойып, тригонометриялық теңдеу $\lambda \sin^{\beta}(\mu\xi)$ аламыз.

Синус әдісін қолдану

АКНС (1)-(2) теңдеулерді қарастырып, түрлендіру жасаймыз

$$q = e^{i(ax+bt)} Q_1, \tag{8}$$

$$r = e^{-i(ax+bt)} Q_2. \tag{9}$$

(1)-(2) теңдеулер келесі түрге келеді

$$-bQ_1 - ciQ_1' + a^2 Q_1 - 2iaQ_1' - Q_1'' + Q_1{}^2 Q_2 = 0, \tag{10}$$

$$bQ_2 + ciQ_2{}' - a^2 Q_2 + 2iaQ_2' - Q_2'' + Q_2{}^2 Q_1 = 0. \tag{11}$$

Нақты және жорамал бөлігтері (10)-(11) теңдеулерден бөліп аламыз

$$cQ_2' + 2aQ_2' = 0, \tag{12}$$

$$-cQ_1' - 2aQ_1' = 0, \tag{13}$$

$$-bQ_1 + a^2 Q_1 - Q_1'' + Q_1{}^2 Q_2 = 0, \tag{14}$$

$$bQ_2 - a^2 Q_2 - Q_2'' + Q_2{}^2 Q_1 = 0. \tag{15}$$

(12)-(13)-теңдеулерден c толқын жылдамдығын тауып аламыз келесідей

$$c = -2a. \tag{16}$$

Біз синус әдісімен (14)-(15) теңдеулерді шешеміз. Ол үшін шешімді келесі түрде іздеміз

$$Q_1 = \lambda_1 \sin^{\beta_1}(\mu\xi), \tag{17}$$

$$Q_2 = \lambda_2 \sin^{\beta_2}(\mu\xi). \tag{18}$$

Синус шешімін табу үшін (17)-(18) теңдеулердің екінші ретті туындысын аламыз

$$(Q_1)'' = \lambda_1 \beta_1 (\beta_1 - 1)\mu^2 \sin^{\beta_1 - 2}(\mu\xi) - \lambda_1 \beta_1{}^2 \mu^2 \sin^{\beta_1}(\mu\xi), \tag{19}$$

$$(Q_2)'' = \lambda_2 \beta_2 (\beta_2 - 1)\mu^2 \sin^{\beta_2 - 2}(\mu\xi) - \lambda_2 \beta_2{}^2 \mu^2 \sin^{\beta_2}(\mu\xi). \tag{20}$$

(17)-(20) теңдеулерді (14)-(15) теңдеулерге қойып келесі аламыз

$$-b\lambda_1 \sin^{\beta_1}(\mu\xi) + a^2\lambda_1 \sin^{\beta_1}(\mu\xi) - \lambda_1\beta_1(\beta_1 - 1)\mu^2 \sin^{\beta_1 - 2}(\mu\ \xi) + \lambda_1{\beta_1}^2{\mu_1}^2 \sin^{\beta_1}(\mu\ \xi) +$$
$$+{\lambda_1}^2 \sin^{2\beta_1}(\mu\xi)\lambda_2 \sin^{\beta_2}(\mu\xi) = 0, \tag{21}$$

$$b\lambda_2 \sin^{\beta_2}(\mu\xi) - a^2\lambda_2 \sin^{\beta_2}(\mu\xi) - \lambda_2\beta_2(\beta_2 - 1)\mu^2 \sin^{\beta_2 - 2}(\mu\xi) + \lambda_2{\beta_2}^2\mu^2 \sin^{\beta_2}(\mu\xi) +$$
$$+{\lambda_2}^2 \sin^{2\beta_2}(\mu\xi)\lambda_1 \sin^{\beta_1}(\mu\xi) = 0. \tag{22}$$

(21)-(22) теңдеулерден β_1 , β_2 тауып аламыз:

$$\begin{aligned} &\beta_1 - 2 = 2\beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \beta_1 = -1. \\ &\beta_2 - 2 = 2\beta_2 + \beta_1 \Rightarrow \beta_2 = -1 \end{aligned} \tag{23}$$

(23)-ші мәндерді (21)-(22) теңдеулерге қойып келесі өрнектерді аламыз

$$-b\lambda_1 \sin^{-1}(\mu\xi) + a^2\lambda_1 \sin^{-1}(\mu\xi) - 2\lambda_1\mu^2 \sin^{-3}(\mu\xi) + \lambda_1\mu^2 \sin^{-1}(\mu\xi) +$$
$$+{\lambda_1}^2 \sin^{-2}(\mu\xi)\lambda_2 \sin^{-1}(\mu\xi) = 0 \tag{24}$$

$$b\lambda_2 \sin^{-1}(\mu\xi) - a^2\lambda_2 \sin^{-1}(\mu\xi) - 2\lambda_2\mu^2 \sin^{-3}(\mu\xi) + \lambda_2\mu^2 \sin^{-1}(\mu\xi) +$$
$$+{\lambda_1}^2 \sin^{-2}(\mu\xi)\lambda_2 \sin^{-1}(\mu\xi) = 0 \tag{25}$$

(24)-ші теңдеуден келесі жүйелерді аламыз

$$\begin{aligned} &\sin^{-1}(\mu\xi): \qquad -b\lambda_1 + a^2\lambda_1 + \lambda_1\mu^2 = 0 \\ &\sin^{-3}(\mu\xi): \qquad -2\lambda_1\mu^2 + {\lambda_1}^2\lambda_2 = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

және (25)-ші теңдеуден табамыз

$$\begin{aligned} &\sin^{-1}(\mu\xi): \qquad b\lambda_2 - a^2\lambda_2 + \lambda_2\mu^2 = 0 \\ &\sin^{-3}(\mu\xi): \qquad -2\lambda_2\mu^2 + {\lambda_2}^2\lambda_1 = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

(26)-(27)-ші жүйелерден табамыз

$$\mu = \pm\sqrt{a^2 - b},\ \lambda_1 = \sqrt{2(a^2 - b)},\ \lambda_2 = \sqrt{2(a^2 - b)} \tag{28}$$

(28) теңдеулерді (17)-(18)-ші теңдеулерге қойып, содан кейін алынған өрнекті (8)-(9) теңдеулерге қойсақ, синус шешімдерін табамыз

$$q(x,t) = \pm e^{i(ax+bt)}\sqrt{2(a^2 - b)} \sin^{-1}(\sqrt{a^2 - b}(x - ct)),$$

$$r(x,t) = \times e^{-i(ax+bt)}\sqrt{2(a^2 - b)} \sin^{-1}(\sqrt{a^2 - b}(x - ct)),$$

мұнда $c = -2a$.

Бұл жұмыста АКНС теңдеулер жүйесің зерттедік. Синус әдісі арқылы осы теңдеудің нақты толқындық шешімін алдық. Бұл әдіс сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі нақты шешімдерін алу үшін қолданылады.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947).

Қолданылған әдебиеттер тізім

1. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory // Springer.-2009.-P.746
2. Kutum B.B., Shaikhova G.N. q-soliton solution for two-dimensional q-Toda lattice. Bulletin of the Karaganda university // Physics series. 2019, No.2(95), pp. 22–26.
3. Bekova G., YesmakhanovaK., Myrzakulov R, Shaikhova G. Darboux transformation and soliton solution for the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries equations. // Journal of Physics: Conference Series. 2017,936, 012045.
4. Wazwaz A.M. The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures.//Appl. Math. Comput., 2004, vol. 159(2), pp. 559- 576.
5. Yusufoglu E., Bekir, A.Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using Sine-Cosine method //Internat. J. Comput. Math. , 2006, vol. 83(12), pp. 915-924.
6. Wazwaz A.M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations // Mathematical and Computer Modeling. 2004, No 40(5), pp. 499–508.
7. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., and Segur H.. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. Stud. Appl. Math., 53: 249–315, 1974.
8. Lax P. D.. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math, 21:467–490, 1968.
9. Zakharov V. E. and Shabat A. B.. Exact theory of two-dimensional selffocusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Sov. Phys. JETP, 34:62–69, 1972.
10. Segur H.and Ablowitz M. J.. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, PA 1981.
11. Zakharov V. E. and Shabat A. B.. Exact theory of two-dimensional selffocusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Sov. Phys. JETP, 34:62–69, 1972.
12. Segur H.and Ablowitz M. J.. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, PA 1981.