Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы, 2021, том 134, №1, 44-54 беттер
http://bulphysast.enu.kz, E-mail: vest_phys@enu.kz

МРНТИ: **29.19.03**

С.К. Тлеукенов [1] , К.Н. Балабеков [3] , З.К. Жалгасбекова [3]

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: [1] matricant@inbox.ru, [2] balabekov_kn@enu.kz, [3] ziba_19_09@mail.ru)

Отражение и преломление электромагнитных волн на границе анизотропных сред моноклинной симметрии

Аннотация: получены индикатрисы волнового вектора, фазовой и групповой скоростей электромагнитных волн TE и TM поляризации в моноклинных кристаллах при отличии от нуля ε_{yz} и μ_{yz} - элементов тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Для рассматриваемого класса моноклинных кристаллов определено существование двух типов TE-волн (E_x , H_y), (E_x , H_z) и двух типов TM-волн (H_x , E_y), (H_x , E_z), распространяющихся в координатной плоскости (yoz) без взаимной трансформации. Получены уравнения индикатрисы волновых векторов, фазовой и групповой скоростей для всех типов волн.

Аналитически решена задача об отражении электромагнитных волн TE и TM поляризации на границе моноклинных кристаллов рассматриваемого класса. Определены плотности потоков отраженных и преломленных электромагнитных волн.

Ключевые слова: анизотропия, моноклинная симметрия, моноклинный кристалл, TE и TM электромагнитные волны, фазовая и групповая скорости, поток электромагнитной энергии, коэффициенты отражения и преломления.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-6836-2021-134-1-44-54

Поступила: 09.02.2021/ **Допущена к опубликованию:** 22.02.2021

Введение. Закономерности электромагнитных волновых процессов в анизотропных средах с учетом анизотропии тензора диэлектрической проницаемости хорошо известны [1,2,3].

В настоящее время интенсивно ведутся теоретические и экспериментальные работы, связанные с изучением пьезомагнитных, магнитострикционных и магнитоэлектрических эффектов. Рассматриваются композитные, многослойные структуры при наличии слоев с ферромагнитными свойствами [4-7].

Анизотропия и разнообразие физико-механических свойств кристаллов, проявление анизотропных свойств сред в различных физико-механических условиях, создание искусственных материалов приводят к необходимости детального исследования закономерностей электромагнитных волновых процессов в средах различной симметрии с учетом анизотропии параметров диэлектрической и магнитной проницаемости.

В данной работе на основе уравнений Максвелла:

$$
\begin{aligned}
rot\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
rot\vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
div\vec{D} &= 0 \\
div\vec{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

при отсутствии токов $\vec{j} = 0$ и $\rho = 0$ зарядов рассматриваются задачи отражения и преломления электромагнитных волн TE и TM поляризации на плоской границе сред моноклинной анизотропии.

Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей имеют вид:

$$\hat{\varepsilon} = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{smallmatrix}\right); \hat{\mu} = \left(\begin{smallmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & \mu_{yz} \\ 0 & \mu_{yz} & \mu_z \end{smallmatrix}\right) \qquad (2)$$

Абсолютные проницаемости ε_0 , μ_0 содержатся (включены) в ε_{ij} , μ_{ij} . Параметры ε_{ij} , μ_{ij} постоянные.

На основе представления решений:

$$f(x,y,z,t) = \tilde{f}(z)e^{iwt-ik_x x-ik_y y} \qquad (3)$$

Система уравнений (1) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которое в матричной форме имеет вид:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W}; \vec{W} = (E_y, H_x, H_y, E_x)^t \qquad (4)$$

Матрица коэффициентов B, в общем случае, имеет порядка (4x4), знак «t» означает транспонирование вектор-строки в вектор-столбец.

1. Системы дифференциальных уравнений первого порядка

1.1 На основе представления решений в виде (3) система уравнений Максвелла (1), описывающая распространение плоских волн в координатной плоскости (zoy), приводится к виду:

$$\tfrac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W}; \vec{W} = (E_x, H_y, H_x, E_y)^t \qquad (1.1)$$

Компоненты $(E_x, H_y)^t$ -описывают волну TE-поляризации; компоненты $(H_x, E_y)^t$ -волну TM-поляризации. Компоненты E_x и H_x перпендикулярны плоскости (zoy).

Матрица коэффициентов B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{33} \end{pmatrix};$$

$$b_{11} = ik_y \tfrac{\mu_{yz}}{\mu_z}; b_{12} = -iw\mu_y + iw\tfrac{\mu_{yz}^2}{\mu_z}; b_{21} = -iw\varepsilon_x + i\tfrac{\mu_y^2}{w\mu_z};$$

$$b_{33} = ik_y \tfrac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_z}; b_{34} = iw\varepsilon_y - iw\tfrac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_z}; b_{43} = iw\mu_x - i\tfrac{k_y^2}{w\varepsilon_z} \qquad (1.2)$$

Волны TE и TM поляризации распространяются без взаимной трансформации.

Из (1.2) следует:

$$\tfrac{d\vec{W}_{TE}}{dz} = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{smallmatrix}\right)\vec{W}_{TE}; \ \vec{W}_{TE} = (E_x, H_y)^t \qquad (1.3)$$

$$\tfrac{d\vec{W}_{TM}}{dz} = \left(\begin{smallmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{33} \end{smallmatrix}\right)\vec{W}_{TM}; \ \vec{W}_{TM} = (H_x, E_y)^t \qquad (1.4)$$

1.2 Рассматривая представление решений в виде:

$$f(x,y,z,t) = \tilde{f}(y)e^{iwt-ik_x x-ik_z z} \qquad (1.5)$$

уравнения Максвелла (1) приводятся к уравнению:

$$\frac{d\vec{W}}{dy} = B\vec{W}; \vec{W} = (E_x, H_z, H_x, E_z)^t \qquad (1.6)$$

Распространение плоских электромагнитных волн в координатной плоскости (yoz) в этом случае описывается уравнениями:

$$\frac{d\vec{W_{TE}}}{dy} = B\vec{W_{TE}}; \vec{W_{TE}} = (E_x, H_z)^t \qquad (1.7)$$

$$B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{smallmatrix}\right);$$

$$b_{11} = ik_z\frac{\mu_{yz}}{\mu_y}; b_{12} = iw(\mu_z - \frac{\mu_{yz}^2}{\mu_y}); b_{21} = i(w\varepsilon_x - \frac{k_z^2}{w\mu_y}) \qquad (1.8)$$

$$\frac{d\vec{W_{TM}}}{dy} = B\vec{W_{TM}}; \vec{W_{TM}} = (H_x, E_z)^t \qquad (1.9)$$

$$B = \left(\begin{smallmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{33} \end{smallmatrix}\right);$$

$$b_{33} = ik_z\frac{\varepsilon_{yz}}{\epsilon_y}; b_{34} = -iw(\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_y}); b_{43} = i(w\mu_x - \frac{k_z^2}{w\varepsilon_y}) \qquad (1.10)$$

таким образом, в плоскости (yoz) или (zoy) могут распространяться две волны TE - поляризации с компонентами:

$$(E_x, H_y), (E_x, H_z) \qquad (1.11)$$

и две волны TM-поляризации:

$$(H_x, E_y), (H_x, E_z) \qquad (1.12)$$

В координатной плоскости (yoz) плоские гармонические волны с компонентами электрических и магнитных полей (1.11), (1.12) распространяются без взаимодействия.

2. Индикатрисы фазовых и групповых скоростей.

2.1 Уравнение индикатрисы волнового вектора TE-волны с компонентами (E_x, H_y) определяется на основе матрицы коэффициентов уравнения (1.3), из условия [8-10].

$$det\begin{vmatrix} b_{11} + ik_z & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} + ik_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1)$$

используя представления $k_z = kcos\theta$, $k_y = ksin\theta$ и представления элементов b_{ij} (1.2), получим:

$$k_{TE}^2 = w^2\varepsilon_x\mu_z\frac{\mu_{yz}^*}{\Omega_{TM}}; \mu_{yz}^* = \frac{\mu_y}{\mu z} - \frac{\mu_{yz}^2}{\mu_z^2} \qquad (2.2)$$

$$\Omega_{TE} = cos^2\theta + 2\frac{\mu_{yz}}{\mu_z}sin\theta cos\theta + \frac{\mu_y}{\mu_z}sin^2\theta$$

Здесь θ - угол между осью z и волновым вектором $\vec{k}$.
Из (2.2) следует выражение для индикатрисы фазовой скорости:

$$V_{fTE}^2 = \frac{w^2}{k_2} = \frac{\Omega_{TE}}{\varepsilon_x\mu_z\mu_{yz}^*} \qquad (2.3)$$

Групповая скорость волны может быть определена из соотношения Релея:

$$\vec{V}_{gTE} = \vec{n}V_{fTE} + \vec{n}_\theta\frac{dV_{fTE}}{d\theta} \qquad (2.4)$$

$\vec{n}$ - единичный вектор, определяющий направление фазовой скорости, $\vec{n}_\theta$ - единичный вектор, перпендикулярный $\vec{n}$, и определяет направление компоненты групповой скорости, связанной с изменением угла θ.

Дифференцирование фазовой скорости V_f, заданной формулой (2.3) по θ приводит к:

$$V_\theta = \frac{dV_{fTE}}{d\theta} = \frac{\left(\frac{\mu_y}{\mu_z}-1\right)sin\theta cos\theta+\frac{\mu_{yz}}{\mu_z}cos2\theta}{V_{fTE}\varepsilon_x\mu_z\mu^*_{yz}} \qquad (2.5)$$

Из (2.3) и (2.5) определяется величина групповой скорости с учетом (2.4)

$$V_g^2 = V_f^2 + V_\theta^2 \qquad (2.6)$$

Угол γ между векторами фазовой скорости и групповой скорости и угол β, определяющий направление вектора групповой скорости в плоскости (yoz), следует из (2.4) на основе (2.3) и (2.5):

$$tg\gamma = \frac{1}{V_f}\frac{dV_f}{dt} = \frac{\mu_{yz}+(\mu_y-\mu_z)tg\theta-\mu_{yz}tg^2\theta}{\mu_z+2\mu_{yz}tg\theta+\mu_y tg^2\theta} \qquad (2.7)$$

Для угла β имеет:

$$\beta = \theta + \gamma \Rightarrow tg\beta = \frac{\mu_{yz}+\mu_y tg\theta}{\mu_z+\mu_{yz}tg\theta} \qquad (2.8)$$

Из (2.5)-(2.7) следует:

$$V^2_{gTE} = \frac{(\mu_z+\mu_{yz}tg\theta)^2+(\mu_{yz}+\mu_y tg\theta)^2}{\varepsilon_x(\mu_y\mu_z-\mu^2_{yz})(\mu_z+2\mu_{yz}tg\theta+\mu_y tg^2\theta)} \qquad (2.9)$$

2.2 ТМ волна с компонентами (H_x , E_y). Плоскость (zoy).

На основе матрицы коэффициентов В (1.4), элементов b_{ij} из (1.2) и условия:

$$det\begin{vmatrix} b_{33}+ik_z & b_{34} \\ b_{43} & b_{33}+ik_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.10)$$

с учетом представления компонент волнового вектора $k_z = kcos\theta$; $k_y = ksin\theta$, θ - угол между осью z и волновым вектором $\vec{k}$ получим индикатрису волнового вектора:

$$k^2_{TM} = w^2\varepsilon_z\mu_x\frac{\varepsilon^*_{yz}}{\Omega_{TM}}; \varepsilon^*_{yz} = \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} - \frac{\varepsilon^2_{yz}}{\varepsilon^2_z}\right) \qquad (2.11)$$

$$\Omega_{TM} = cos^2\theta + 2\frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_z}sin\theta cos\theta + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}sin^2\theta$$

Индикатриса фазовой скорости определяется выражением:

$$V^2_{fTM} = \frac{\Omega_{TM}}{\varepsilon_z\mu_x\varepsilon^*_{yz}}; \qquad (2.12)$$

$$V_\theta = \frac{dV_{fTM}}{d\theta} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}-1\right)sin\theta cos\theta+\frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_z}cos2\theta}{V_{fTM}\mu_x\varepsilon_z\varepsilon^*_{yz}} \qquad (2.13)$$

$$tg\gamma = \frac{1}{V_{fTM}}\frac{dV_{fTM}}{d\theta} = \frac{\varepsilon_{yz}+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)tg\alpha\theta-\varepsilon_{yz}tg^2\varepsilon\theta}{\varepsilon_z+2\varepsilon_{yz}tg\theta+\varepsilon_y tg^2\theta} \qquad (2.14)$$

$$\beta = \theta + \gamma \Rightarrow tg\beta = \frac{\varepsilon_{yz}+\varepsilon_y tg\theta}{\varepsilon_z+\varepsilon_{yz}tg\theta} \qquad (2.15)$$

Индикатриса групповой скорости ТМ-волны

$$V^2_{gTM} = \frac{(\varepsilon_z+\varepsilon_{yz}tg\theta)^2+(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_y tg\theta)^2}{\mu_x(\varepsilon_y\varepsilon_z-\varepsilon^2_{yz})(\varepsilon_z+2\varepsilon_{yz}tg\theta+\varepsilon_y tg^2\theta)} \qquad (2.16)$$

2.3 Кинематические характеристики волн ТЕ - (E_x , H_z) и волн ТМ - (H_x , E_z) поляризации в координатной плоскости (yoz).

Определение кинематических характеристик волн ТЕ - (E_x , H_z) аналогично изложенному в к. 2.1.

Элементы b_{ij} матрицы коэффициентов В уравнения (1.7) имеют вид (1.8).

Из условия (2.1) следует:

$$k_{TE}^2 = \frac{w^2 \varepsilon_x \mu_y \mu_{yz}^*}{\Omega_{TE}}; \mu_{yz}^* = \frac{\mu_z}{\mu_y} - \frac{\mu_{yz}^2}{\mu_y^2} \qquad (2.17)$$

$$\Omega_{TE} = cos^2\theta + 2\frac{\mu_{yz}}{\mu_y} sin\theta cos\theta + \frac{\mu_z}{\mu_y} sin^2\theta \qquad (2.18)$$

Здесь θ - угол между осью y и волновым вектором $\vec{k}_{TE}$.

Индикатриса фазовой скорости следует из (2.17)

$$V_{fTE}^2 = \frac{\Omega_{TE}}{\varepsilon_x \mu_y \mu_{yz}^*} \qquad (2.19)$$

На основе соотношения Релея (2.4) для V_θ имеет:

$$V_\theta = \frac{dV_{fTE}}{d\theta} = \frac{\left(\frac{\mu_z}{\mu_y} - 1\right) sin\theta cos\theta + \frac{\mu_{yz}}{\mu_y} cos2\theta}{V_{fTE} \varepsilon_x \mu_y \mu_{yz}^*} \qquad (2.20)$$

Индикатриса групповой скорости:

$$V_{gTE}^2 = \frac{(\mu_y + \mu_{yz} tg\theta)^2 + (\mu_{yz} + \mu_z tg\theta)^2}{\varepsilon_x (\mu_y \mu_z - \mu_{yz}^2) + (\mu_y + 2\mu_{yz} tg\theta + \mu_z tg^2\theta)} \qquad (2.21)$$

Угол β , определяющий направление вектора групповой скорости ТЕ волн с компонентами E_x , H_z в плоскости yoz, равен:

$$tg\beta = \frac{\mu_{yz} + \mu_z tg\theta}{\mu_y + \mu_{yz} tg\theta} \qquad (2.22)$$

Угол γ между векторами фазовой и групповой скорости зависит от θ и определяется выражением:

$$tg\gamma = \frac{\mu_{yz} + (\mu_z - \mu_y) tg\theta - \mu_{yz} tg^2\theta}{\mu_y + 2\mu_{yz} tg\theta + \mu_z tg^2\theta} \qquad (2.23)$$

Волна ТМ поляризации в плоскости yoz с компонентами H_x , E_z на основе (1.9)-(1.10) имеет следующие характеристики:

$$k_{TM}^2 = w^2 \varepsilon_y \mu_x \frac{\varepsilon_{zy}^*}{\Omega_{TM}} \qquad (2.24)$$

$$\varepsilon_{zy}^* = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} - \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_y^2}$$

$$\Omega_{TM} = cos^2\theta + 2\frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_y} sin\theta cos\theta + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} sin^2\theta \qquad (2.25)$$

$$V_{fTM}^2 = \frac{\Omega_{TM}}{\varepsilon_y \mu_x \varepsilon_{zy}^*} \qquad (2.26)$$

$$V_\theta = \frac{\left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} - 1\right) sin\theta cos\theta + \frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_y} cos2\theta}{V_{fTM} \mu_x \varepsilon_y \varepsilon_{zy}^*} \qquad (2.27)$$

$$tg\gamma = \frac{\varepsilon_{yz} + (\varepsilon_z - \varepsilon_y) tg\theta - \varepsilon_{yz} tg^2\theta}{\varepsilon_y + 2\varepsilon_{yz} tg\theta + \varepsilon_z tg^2\theta} \qquad (2.28)$$

$$tg\beta = \frac{\varepsilon_{yz}+\varepsilon_z tg\theta}{\varepsilon_y+\varepsilon_{yz} tg\theta}$$

$$V_{gTM}^2 = \frac{(\varepsilon_y+\varepsilon_{yz}tg\theta)^2+(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_z tg\theta)^2}{\mu_x(\varepsilon_y\varepsilon_z-\varepsilon_{yz}^2)(\varepsilon_y+2\varepsilon_{yz}tg\theta+\varepsilon_z tg^2\theta)} \qquad (2.29)$$

При выполнении условия $\gamma = 0$ $(V_\theta = 0)$:

$$tg^2\theta - \frac{\varepsilon_z-\varepsilon_y}{\varepsilon_{yz}} tg\theta - 1 = 0 \qquad (2.30)$$

направления фазовой и групповой скоростей совпадают, также равны их величины. При выполнении (2.30) , в области $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right) : \gamma \succ 0$ если $0 \le \theta \prec \theta_0$, и $\gamma \prec 0$ если $\theta_0 \prec \theta \le \frac{\pi}{2}$.
θ_0 - угол, при котором выполняется (2.30).
Область применения β :

$$\frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_y} \le \beta \le \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{yz}} \qquad (2.31)$$

Как видно, с увеличением ε_{yz} область изменения направления вектора групповой скорости сужается. Аналогичное условие в виде (2.30) и соотношения справедливы для всех рассмотренных типов волн. Более подробный анализ изложен в [8].

3.Отражение и преломление волн.

3.1 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений I-го порядка имеют представление решения в виде матриц фундаментальных решений. Нормированная матрица фундаментальных решений называется матрицантом [11].

В случае матричных уравнений:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

описывающих закономерности электромагнитных волн в координатных плоскостях моноклинных кристаллов и полученных в данной работе, получено точное аналитическое решение в форме матриканта [12].

Это решение имеет вид:

$$T = e^{b_{11}z}\left[Icos\varkappa z + \frac{B_0}{\varkappa} sin\varkappa z\right] \qquad (3.2)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \varkappa^2 = -b_{12}b_{21}. \qquad (3.3)$$

Для решения задач отражения/преломления плоских волн, оно преобразуется к виду [13-15].

$$T = \left[\frac{1}{2}\left(I + \frac{B_0}{i\varkappa}\right)e^{i\varkappa z} + \frac{1}{2}\left(I - \frac{B_0}{i\varkappa}\right)e^{-i\varkappa z}\right]e^{b_{11}z} \qquad (3.4)$$

Первое слагаемое описывает обратные волны, второе – прямые волны; множитель e^{iwt} опущен.

Условие непрерывности волновых полей: падающих $\vec{W}_0$,отраженных $\vec{W}_R$ и преломленных $\vec{W}_T$ волн на границах раздела при (z=0) или (y=0), на основе (4) имеет вид:

$$\left(\frac{1}{2}I - R_0\right)\vec{W}_0 + \left(\frac{1}{2}I + R_0\right)\vec{W}_R = \left(\frac{1}{2}I - R\right)\vec{W}_T \qquad (3.5)$$

учитывая непрерывность решений:

$$\left(\vec{W}_0 + \vec{W}_R\right)|_{t=0} = \vec{W}_T\,|_{z=0} \qquad (3.6)$$

из (5) следует:

$$(R_0+R)\vec{W}_R=(R_0-R)\vec{W}_0 \qquad (3.7)$$

матрицы граничных условий R_0 и Ω имеют вид:

$$R_0=\frac{1}{2i\varkappa_0}B_0; R=\frac{1}{2i\varkappa_1}B_1 \qquad (3.8)$$

индекс «0» относится к среде $z\leq 0$, «1» - z ≥ 0.
из (7) следует поле отраженных волн:

$$\vec{W}_R=(R_0+R)^{-1}(R_0-R)\vec{W}_0 \qquad (3.9)$$

Поле преломленных волн:

$$\vec{W}_T=\vec{W}_0+\vec{W}_R=\left[I+(R_0+R)^{-1}(R_0-R)\right]\vec{W}_0 \qquad (3.10)$$

используя обозначения:

$$(R_0\pm R)=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}0 & r^{\pm}_{12}\\ r^{\pm}_{21} & 0\end{pmatrix}; r^{\pm}_{12}=\frac{b^0_{12}}{\varkappa_0}\pm\frac{b_{12}}{\varkappa_1}; r^{\pm}_{21}=\frac{b^0_{21}}{\varkappa_0}\pm\frac{b_{21}}{\varkappa_1} \qquad (3.11)$$

после вычислений получим:

$$(R_0+R)^{-1}(R_0-R)=\begin{pmatrix}\frac{r^-_{21}}{r^+_{21}} & 0\\ 0 & \frac{r^-_{12}}{r^+_{12}}\end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

3.2 Амплитуды отраженных и преломленных волн.
С учетом элементов b_{ij}:

$$\frac{r^-_{21}}{r^+_{21}}=\frac{b^0_{21}\varkappa_1-b_{21}\varkappa_0}{b^0_{21}\varkappa_1+b_{21}\varkappa_0}=\frac{b_{12}\varkappa_0-b^0_{12}\varkappa_1}{b_{12}\varkappa_0+b^0_{12}\varkappa_1} \qquad (3.13)$$

$$\frac{r^-_{12}}{r^+_{12}}=\frac{b^0_{12}\varkappa_1-b_{12}\varkappa_0}{b^0_{12}\varkappa_1+b_{12}\varkappa_0}=-\frac{r^-_{21}}{r^+_{21}} \qquad (3.14)$$

$$1+\frac{r^-_{21}}{r^+_{21}}=\frac{2b^0_{21}\varkappa_1}{b^0_{21}\varkappa_1+b_{21}\varkappa_0}; 1+\frac{r^-_{12}}{r^+_{12}}=\frac{2b^0_{12}\varkappa_1}{b^0_{12}\varkappa_1+b_{12}\varkappa_0}; \qquad (3.15)$$

а) В случае ТЕ волны с компонентами E_x, H_y; уравнение (1.3), элементы b_{ij} имеют вид:

$$b_{12}=-iw\left(\mu_y-\frac{\mu^2_{yz}}{\mu_z}\right)=-iw\mu_z\mu^*_{yz}; \mu^*_{yz}=\frac{\mu_y}{\mu_z}-\frac{\mu^2_{yz}}{\mu^2_z}$$

$$b_{21}=-\frac{i}{w\mu_z}(w^2\varepsilon_x\mu_z-k^2_y) \qquad (3.16)$$

$$\frac{E_{xR}}{E_{xo}}=\frac{r^-_{21}}{r^+_{21}}=\frac{b^0_{21}\varkappa_1-b_{21}\varkappa_0}{b^0_{21}\varkappa_1+b_{21}\varkappa_0}=\frac{b_{12}\varkappa_0-b^0_{12}\varkappa_1}{b_{12}\varkappa_0+b^0_{12}\varkappa_1} \qquad (3.17)$$

В (3.17) удобнее использовать формулу относительно b_{12}:

$$\frac{E_{xR}}{E_{xo}}=\frac{\mu_z\mu^*_{yz}\varkappa_0-\mu^0_z\mu^{*0}_{yz}\varkappa_1}{\mu_z\mu^*_{yz}\varkappa_0+\mu^0_z\mu^{*0}_{yz}\varkappa_1} \qquad (3.18)$$

$$\frac{H_{yR}}{H_{yo}}=\frac{\mu^0_z\mu^{*0}_{yz}\varkappa_1-\mu_z\mu^*_{yz}\varkappa_0}{\mu^0_z\mu^{*0}_{yz}\varkappa_1+\mu_z\mu^*_{yz}\varkappa_0} \qquad (3.19)$$

индекс «0» относится к первой среде, из которой происходит падение плоской TE – волны (E_{x0} , H_{y0}) на границу сред z = 0.

б) Для волн TM – поляризации (1.4) с элементами b_{ij} (1.2) аналогично получим:

$$\frac{H_{xR}}{H_{xo}} = \frac{\varepsilon_z \varepsilon_{yz}^{*} \varkappa_0 - \varepsilon_z^0 \varepsilon_{yz}^{*0} \varkappa_1}{\varepsilon_z \varepsilon_{yz}^{*} \varkappa_0 + \varepsilon_z^0 \varepsilon_{yz}^{*0} \varkappa_1} \qquad (3.20)$$

$$\frac{E_{yR}}{E_{yo}} = \frac{\varepsilon_z \varepsilon_{yz}^{*} \varkappa_0 - \varepsilon_z^0 \varepsilon_{yz}^{*0} \varkappa_1}{\varepsilon_z \varepsilon_{yz}^{*0} \varkappa_0 + \varepsilon_z^0 \varepsilon_{yz}^{*0} \varkappa_1} \qquad (3.21)$$

$$\varkappa_0 = k_0 cos\theta_0; \varkappa_1 = k_1 cos\theta_1 \qquad (3.22)$$

При анализе процессов отражения/преломления волн TE – поляризации (1.3), в формулах (3.18)-(3.19) для угла падения θ_0 и θ_1 угла преломления необходимо выполнение условия:

$$k_0 sin\theta_0 = k_1 sin\theta_1; k_{y0} = k_{y1} \qquad (3.23)$$

индикатрисы k_0 , k_1 в случае TE – волны (E_x , H_y) имеют вид (2.2), на основе (3.23) имеет:

$$w^2 \varepsilon_x^0 \mu_z^0 \frac{\mu_{yz}^{*0}}{\Omega_{TE0}} sin^2\theta_0 = w^2 \varepsilon_x \mu_z \frac{\mu_{yz}^{*}}{\Omega_{TE1}} sin^2\theta_1 \qquad (3.24)$$

Условие (3.24) приводит к квадратному уравнению относительно $tg\theta_1$. Угол θ_0 задан и является углом падения волны.

В области $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, tg\theta_1 \succ 0$ и уравнение имеет однозначное решение.

в) Амплитуды преломленных волн определяются формулой (3.10) и (3.12). Используя (3.13), (3.14), получим (3.15).

Подстановка элементов матриц B, b_{ij} для конкретного типа волн дает зависимость амплитуд преломленных волн от параметров сред и угла падения волн на границу сред.

г) Энергетические потоки.

Плотность потока электромагнитной энергии находится на основе соотношения Умова-Пойнтинга:

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \qquad (3.25)$$

В случае волн TE- поляризации (E_x, H_y) электромагнитное поле волн имеет три ненулевые компоненты:

$$E_x, H_y, H_z \qquad (3.26)$$

Компоненты напряженности магнитного поля H_y, H_z могут быть записаны в виде:

$$H_y = \frac{k_z \mu_z + k_y \mu_{yz}}{w(\mu_y \mu_z - \mu_{yz}^2)} E_x \qquad (3.27)$$

$$H_z = -\frac{\mu_y k_y + \mu_{yz} k_z}{w(\mu_y \mu_z - \mu_{yz}^2)} E_x \qquad (3.28)$$

Поскольку:

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \times H\right] = \vec{j} S_y + \vec{k} S_z = -\vec{j} E_x H_z + \vec{k} E_x H_y \qquad (3.29)$$

получим:

$$S_y = \frac{\mu_y k_y + \mu_{yz} k_z}{w(\mu_y \mu_z - \mu_{yz}^2)} E_x^2; S_z = \frac{k_z \mu_z + k_y \mu_{yz}}{w(\mu_y \mu_z - \mu_{yz}^2)} E_x^2 \qquad (3.30)$$

Полная плотность потока энергии следует из:

$$S = \sqrt{S_y^2 + S_z^2} \qquad (3.31)$$

Тангенс угла β есть отношение S_y к S_z .

Угол β и групповая скорость, следующие из (3.30) и (3.31), совпадают со значениями (2.8) и (2.9), полученными на основе соотношения Релея.

Результаты изложенных в п.3 получены и справедливы для всех типов волн, рассмотренных в п.1 и п.2.

Заключение.

1. Рассмотрено распространение электромагнитных волн в плоскости yoz моноклинных кристаллов при отличии от нуля компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости ε_{yz} и μ_{yz} .
2. Показано, что в плоскости yoz рассматриваемого класса моноклинных кристаллов распространяются две волны TE и две волны TM поляризации без взаимной трансформации
3. Определены индикатрисы волновых векторов и фазовых скоростей для всех типов волн.
4. На основе уравнения Релея определены индикатрисы групповых скоростей, направления векторов групповых скоростей и углы между векторами фазовых и групповых скоростей.
5. Аналитически решена задача отражения/преломления волн на границе моноклинных кристаллов рассматриваемого класса. Полученные результаты применимы и в случаях, когда одна из сред имеет более высокую симметрию.
6. Определены коэффициенты отражения и преломления, имеющих общее представление для всех рассматриваемых типов волн. В случае контакта изотропных сред эти формулы совпадают с формулами Френеля.
7. Получены плотность потока и компоненты вектора плотности потока электромагнитной энергии отраженных и преломленных волн.
8. Показано совпадение направления и величин групповой скорости, полученных на основе уравнения Релея и вектора Умова-Пойнтинга.
9. Все полученные результаты справедливы для одноосных кристаллов и сред ромбической симметрии.

Список литературы

1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика Сплошных Сред. – Москва: Наука, 1982. – 620 с.
2 Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. – Москва: Наука, 1987. – 616 с.
3 Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. – Москва: Наука, 1984. – 304 с.
4 Rivera J.P. A short review of the magnetoelectric effect and related experimental techniques on single phase ferroics // The European Physical Journal B. – 2009. – Т. 71. – P. 299-313.
5 Бичурин М.И., Петров В.М., Филиппов Д.А., Сринивасан Г., Лалетин В. М. Магнитоэлектрические композиционные материалы на основе феррит-пьезоэлектриков // Перспективные материалы. – 2004. – № 6. – С. 5-12.
6 Филиппов Д.А. Теория магнитоэлектрического эффекта в гетерогенных структурах на основе ферромагнетик – пьезоэлектрик // ФТТ. – 2005. – Т. 47. – № 6. – С. 1082-1084.
7 Hehl F., Obukhov Y., Rivera J., and Schmid H. Rrelativistic analysis of magnetoelectric crystals: extracting a new 4-dimensional p odd and t odd pseudoscalar from Cr_2O_3 data. // Phys. Lett. – 2008. – Т. 372. – P. 1141-1146.
8 Tleukenov S.K., Zhalgasbekova Z.K., Sirenko Yu.K. Phase and group velocities of electromagnetic waves in a monoclinic crystal // Telecommunication and Radio Engineering. – 2019. – Т. 78. – № 1. – P. 1-10.
9 Тлеукенов С.К., Балабеков К.Н., Жалгасбекова З.К. Групповая скорость и поток электромагнитной энергии в ромбических кристаллах // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия. Физика. Астрономия. – 2019. – Т. 126. – № 1. – С. 90-98.
10 Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N. Indicatrices of phase and group velocities of electromagnetic waves in crystals with magnetoelectric effect // Telecommunications and Radio Engineering. – 2019. – Т. 78. – № 6. – P. 465-473.
11 Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - Москва: Наука, 1988. – 560 с.
12 Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том третий, часть вторая. Издание пятое. - Москва: ГИТТЛ, 1953. – 676 с.
13 Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N., and Mozhaev V.G. Angles of Refraction and Directions of Group Velocity Vectors of TE and TM Polarization Waves at the Interface between an Isotropic Medium and a Semi-Space with

the Magnetoelectric Effect // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2020. – V. 84. – № 2. – P. 206–209.

14 Тлеукенов С.К., Суйеркулова Ж.Н., Можаев В.Г. Углы преломления и направления векторов групповых скоростей волн ТЕ и ТМ поляризации на границе изотропной среды и полупространства с магнитоэлектрическим эффектом // Известия ран. серия физическая. – 2020. – Т. 84. – № 2. – С. 261–265.

15 Tleukenov S.K., Balabekov K.N., Zhalgasbekova Z.K. Laws of reflection and refraction of TE and TM polarization waves on the border of rhombic crystals // Вестник КарГУ. Серия. Физика. – 2020. – Т. 97. – № 1. – Р. 70-81.

С.К. Тлеукенов, К.Н. Балабеков, З.К. Жалгасбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Моноклинді симметрияның анизотропты орта шекарасында электромагниттік толқындардың сынуы мен шағылуы

Аннотация. Моноклиндік кристалдардағы ТЕ және ТМ электромагниттік толқындарының фазалық және топтық жылдамдықтарының индикаторлары, нөлдік емес, диэлектрлік және магниттік өтімділік тензорларының ε_{yz} және μ_{yz} элементтері үшін алынған.

Қарастырылған моноклиндік кристалдар класы үшін ТЕ толқындарының екі түрінің болуы анықталады: (E_x , H_y), (E_x , H_z) және ТМ толқындарының екі түрі (H_x , E_y), (H_x , E_z) өзара түрлендірусіз (yoz) координаталық жазықтықта таралады. Толқындардың барлық түрлері үшін толқындық векторлардың фазалық және топтық жылдамдықтары индикатрисасының теңдеулері алынады.

Қарастырылып отырған кластың моноклиндік кристалдарының шекарасында ТЕ және ТМ поляризациясының электромагниттік толқындарының шағылу мәселесі шешілді. Шағылған және сынған электромагниттік толқындардың ағынының тығыздығы анықталады.

Түйін сөздер: анизотропия, моноклиндік симметрия, моноклиндік кристалл, ТЕ және ТМ электромагниттік толқындар, фазалық және топтық жылдамдық, электромагниттік энергия ағыны, шағылу және сыну коэффициенттері.

S.K. Tleukenov, K.N. Balabekov, Z.K. Zhalgasbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Reflection and refrection of electromagnetic waves at the boundary of anisotropic media of monocline symmetry

Abstract. The indicatrices of the wave vector, phase and group velocities of the electromagnetic waves TE and TM polarization in monoclinic crystals are obtained for nonzero ε_{yz} and μ_{yz} - elements of the dielectric and magnetic permeability tensors.

For the class of monoclinic crystals under consideration, there has been determined existence of two types of TE waves:(E_x , H_y), (E_x , H_z) and two types of TM waves: (H_x , E_y), (H_x , E_z) propagating in the coordinate plane (yoz) without mutual transformation. Equations of the indicatrix of wave vectors, phase and group velocities have been obtained for all types of waves.

The problem of the reflection of TE and TM polarization electromagnetic waves at the boundary of monoclinic crystals of the class under consideration has been solved analytically. The authors have been determined the flux densities of reflected and refracted electromagnetic waves.

Keywords: anisotropy, monoclinic symmetry, monoclinic crystal, TE and TM electromagnetic waves, phase and group velocities, electromagnetic energy flux, reflection and refraction coefficients.

References

1 Landau L.D. and Lifshitz E.M. Electrodinamika sploshnyh sred [Electrodynamics of Continuous Media] (Moscow: Nauka, 1982, 620 p.). [in Russian]

2 Yariv A. and Yukh P. Optical waves in crystals (Moscow: Nauka, 1987, 616 p.). [in Russian]

3 Ryazanov M.И. Electrodinamika kondensirovannogo veshestva [Electrodynamics of condensed matter](Moscow: Science, 1984, 304 p.). [in Russian]

4 Rivera J.P. A short review of the magnetoelectric effect and related experimental techniques on single phase ferroics, The European Physical Journal B, 71, 299-313 (2009).

5 Bichurin M.I., Petrov V.M., Filippov D.A., Srinivasan G., and Laletin V.M. Magnetoelectric composite materials based on ferrite-piezoelectrics, Perspective materials, 6, 5-12 (2004).

6 Filippov D.A. Theory of the magnetoelectric effect in heterogeneous structures based on ferromagnet – piezoelectric, Physics and Technology, 47 (6), 1082-1084 (2005).

7 Hehl F., Obukhov Y., Rivera J., and Schmid H. Relativistic analysis of magnetoelectric crystals: extracting a new 4-dimensional p odd and t odd pseudoscalar from Cr_2O_3 data, Phys. Lett, 372, 1141 (2008).

8 Tleukenov S.K., Zhalgasbekova Z.K., Sirenko Yu.K. Phase and group velocities of electromagnetic waves in a monoclinic crystal, Telecommunication and Radio Engineering, 78(1), 1-10 (2019).

9 Tleukenov S.K., Balabekov K.N. and Zhalgasbekova Z.K. Group velocity and flow of electromagnetic energy in rhombic crystals, Bulletin of the L.N. Eurasian National University. Gumilyov. Series. Physics. Astronomy, 1(126), 90-98 (2019).
10 Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N. Indicatrices of phase and group velocities of electromagnetic waves in crystals with magnetoelectric effect, Telecommunications and Radio Engineering, 78(6), 465-473 (2019).
11 Gantmakher F.R. Teoriya matric [Matrix theory] (Moscow: Nauka, 1988, 560 p.). [in Russian]
12 Smirnov V.I. Kurs vysshej matematiki [A course in higher mathematics] Volume 3 (Moscow: GITTL, 1953, 676 p.).[in Russian]
13 Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N. and Mozhaev V.G. Angles of Refraction and Directions of Group Velocity Vectors of TE and TM Polarization Waves at the Interface between an Isotropic Medium and a Semi-Space with the Magnetoelectric Effect, Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2, 206-209 (2020).
14 Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N. and Mozhaev V.G. Ugly prelomleniya i napravleniya vektorov gruppovyh skorostej voln TE i TM polyarizacii na granice izotropnoj sredy i poluprostranstva s magnito elektricheskim effektom, Izvestiya ran. seriya fizicheskaya [Angles of refraction and directions of the group velocity vectors of TE and TM polarization waves at the boundary of an isotropic medium and a half-space with a magneto electric effect, Izvestiya RAN. physical series], 84(2), 261-265 (2020). [in Russian]
15 Tleukenov S.K., Balabekov K.N., Zhalgasbekova Z.K. Laws of reflection and refraction of TE and TM polarization waves on the border of rhombic crystals.Vestnik KarSU, Seria of physics, 97(1), 70-81 (2020).

Сведения об авторах:

Тлеукенов С.К. - ***основной автор***, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. К. Мунайтпасова, 13, Нур-Султан, Казахстан.

Балабеков К.Н. - кандидат физико-математических наук, и.о. профессора кафедры технической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. К. Мунайтпасова, 13, Нур-Султан, Казахстан.

Жалгасбекова З.К. - докторант 3 курса специальности «6М072300-Техническая физика», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. К. Мунайтпасова, 13, Нур-Султан, Казахстан.

Tleukenov S.K. - ***The main author***, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Technical Physics Department of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasov str., Nur-Sultan, Kazakhstan .

Balabekov K.N. - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of Technical Physics Department of L.N. Gumilyov Eurasian National University, K. Munaitpasov str. 13, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Zhalgasbekova Z.K. - The 3 rd year doctoral student in Technical physics at L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasov str., Nur-Sultan, Kazakhstan.