ОӘЖ 530.145

Фурьенің кванттық түрлендіруін кубиттерге қолдану.

Тайғоныров Аңсар Нұржанұлы
ataygonyrov@gmail.com
Механика-математика факультеті, 4 курс
Л.Н.Гумильев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Сулейменов К.М.

Аннотация. Бұл жұмыста кванттық есептеулерде Фурьенің кванттық түрлендіруі мен оның кубиттерге қолданысы көрсетілген.

Кілттік сөздер: кубит, Фурьенің кванттық түрлендіруі, тензорлық көбейту.

Кіріспе

Фурьенің кванттық түрлендіруін кванттық есептеулер облысында қолданысы кең. Шор алгоритмі, фазаны бағалау және дискретті логарифмдерді есептеу – берілген алгоритмнің қолданысының кейбір классикалық мысалдары. Осы алгоритмнің алғашқы сызбалары классикалық компьютерде шешімін табу өте ауыр немесе мүмкін емес болатын мәселелердің шешімін қарастыруда өзекті болып табылады.

Сызықты алгебраның негізгі нысаны ретінде векторлық кеңістіктерді қарастырамыз. Негізгі қарастыратынымыз $\mathbb{C}^n$ кеңістігі, яғни n – элементті комплекс сандар жиыны:

$(z_1, \dots, z_n)$. Векторлық кеңістіктің элементтері векторлар деп аталады, оларды кейде матрицалық түрде қолданамыз $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$.
Векторлық кеңістіктегі вектор үшін кванттық механикадағы стандартты белгілеуі $|j\rangle$ түрінде болады. $|j\rangle$ белгілеуі толығымен кет – вектор деп аталады.

Кванттық есептеулердің негізгі элементтері ретінде кванттық биттер қолданылады (келесіде *кубит*). Классикалық биттер сынды кубиттерде 0 және 1 күйлерінде бола алады. Алайда, классикалық биттерден айырмашылығы кубиттердің аралық күйде, яғни суперпозиция күйінде болуы мүмкін: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.
Кванттық есептеу үшін аттану нүктесі ретінде есептелінетін базисте кубиттін түрін таңдаудан басталады [1], яғни

$$|0\rangle = \binom{1}{0}, |1\rangle = \binom{0}{1}.$$

Тензорлық көбейту – векторлық кеңістіктерден, векторлардан немесе оператордан одан «үлкен» векторлық кеңістіктер, векторлар немесе операторлар алудың ерекше әдісі.[2]

$\binom{p_1}{p_2}$ және $\binom{q_1}{q_2}$ векторлары берілсін. Онда олардан тензорлық көбейтіндісі келесі түрде анықталады:

$$\binom{p_1}{p_2} \otimes \binom{q_1}{q_2} = \begin{pmatrix} p_1 q_1 \\ p_1 q_2 \\ p_2 q_1 \\ p_2 q_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\otimes$ белгісі тензорлық көбейтіндіні білдіреді.

1. Фурьенің кванттық түрлендіруі

Фурьенің дискретті түрлендіруі – қарапайым математикалық белгілеу ретінде Фурье түрлендіруі үшін $x_0, \dots, x_{N-1}$ комплекс компоненттері бар вектор алынады.

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

N – бекітілген ұзындығы. Түрлендірілген ақпараттар $y_0, \dots, y_{N-1}$ комплекс компоненттері бар вектор түрінде келесі формула арқылы анықталады [3]:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j k}{N}} \quad (3)$$

Нәтижесінде комплекс вектор пайда болады

$$y = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j 0}{N}} \\ \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j 1}{N}} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Фурьенің кванттық түрлендіру – Фурьенің дискретті түрлендіруі секілді анықталған, алайда, басқаша жазылған. Берілген $|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle$ ортонормаланған базисте Фурьенің кванттық түрлендіруі сызықты оператор ретінде анықталады [1]:

$$|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ijk}{N}} |k\rangle \tag{5}$$

Фурьенің кванттық түрлендіруі келесі түрде анықталады

$$Q|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \ldots \sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(\sum_{t=1}^{n} k_t 2^{-t})} |k_1 k_2 \ldots k_n\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \ldots \sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \cdots + k_{n-1} 2^{-(n-1)} + k_n 2^{-n})} |k_1 k_2 \ldots k_n\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \ldots \sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \cdots + k_{n-1} 2^{-(n-1)} + k_n 2^{-n})} |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes$$

$$\otimes \ldots \otimes |k_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{v=1}^{n} \sum_{k_v=0}^{1} e^{i2\pi j(k_v 2^{-v})} |k_v\rangle.$$

Нәтижесінде

$$Q|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{v=1}^{n} \left(|0\rangle + e^{i2\pi j 2^{-v}} |1\rangle \right) \tag{6}$$

(6) теңдеудің орындалуын түсіну үшін теңдеуді кванттық есептеулерде бірнеше кубиттерге қолданайық.

Алдымен, n =1 жалғыз кубиттік жағдайды қарастырайық.

$$Q|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes_{v=1}^{n} \left(|0\rangle + e^{i2\pi j 2^{-1}} |1\rangle \right) \tag{7}$$

$|j\rangle = |0\rangle$, $|j\rangle = |1\rangle$ әр кубит жағдайында келесідей болады

$$Q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \; Q|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1} \tag{8}$$

Күтілгендей, жалғыз кубиттік жағдайда $Q = H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, яғни Адамар элементіне тең [2].

2. Кубиттерге кванттық Фурье түрлендіруінің қолданылуы

n = 2 кубиттік, яғни $|j\rangle = |j_1 j_2\rangle$ жағдайды қарастырайық. (6) формуладан n = 2 үшін келесі формуланы аламыз:

$$Q|j_1 j_2\rangle = \frac{1}{2}\left(\left(|0\rangle + e^{i2\pi j_2 2^{-1}} |1\rangle \right) \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi (j_1 2^{-1} + j_2 2^{-2})} |1\rangle \right) \right) \tag{9}$$

Егер $|j_1 j_2\rangle = |00\rangle$ болса, онда $|00\rangle$ жағдай үшін кванттық сұлбаны келесі суреттегідей болады:

```
0: ───H───@───────────x───
          │           │
1: ───────@^0.5───H───x───
```

Сурет 1. $|00\rangle$ *күйі үшін кванттық сұлба.*

(9) теңдеуді әр көбейтіндіні векторлық түрде тензорлық көбейту арқылы көбейтеміз:

$$Q|j_1j_2\rangle = \frac{1}{2}\Big(\big(\,|0\rangle + e^{i2\pi j_2 2^{-1}}|1\rangle\big) \otimes \big(\,|0\rangle + e^{i2\pi\left(j_1 2^{-1} + j_2 2^{-2}\right)}|1\rangle\big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi j_2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi(j_1 + j_2 2^{-1})} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi(j_1 + j_2 2^{-1})} \\ e^{i\pi j_2} \\ e^{i\pi\left(j_1 + \frac{3}{2} j_2\right)} \end{pmatrix}$$

Жоғарыда алынған мән бойынша $Q|j_1j_2\rangle = \mathrm{Q}|00\rangle$ сәйкесінше қойып, есептейміз:

$$Q|00\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi(0)} \\ e^{i\pi(0)} \\ e^{i\pi(0)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

(10) шешімін кванттық күйде жазатын болсақ, жауабы келесі түрде болады:

$$Q|00\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right) \qquad (11)$$

n = 3 кубиттік, яғни $|j\rangle = |j_1j_2j_3\rangle$ жағдайды қарастырайық. Онда $Q|j\rangle = Q|j_1j_2j_3\rangle$ үшін (6) формуладан келесі теңдікті аламыз (12):

$$Q|j_1j_2j_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(\,|0\rangle + e^{\frac{i2\pi j_3}{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(\,|0\rangle + e^{i2\pi\left(\frac{j_2}{2} + \frac{j_3}{2^2}\right)}|1\rangle\right) \otimes \left(\,|0\rangle + e^{i2\pi\left(\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \frac{j_3}{2^3}\right)}|1\rangle\right)\right)$$

```
0: ───────H───@───────@──────────────────────────x───
              │       │                          │
1: ───────────@^0.5───┼─────────H───@────────────┼───
                      │             │            │
2: ───X───────────────@^0.25────────@^0.5───H────x───
```

Сурет 2. $|001\rangle$ *күйі үшін кванттық сұлба.*

(12) - дегі векторларды ықшамдап, сәйкесінше тензорлық көбейту арқылы амалды орындасақ, келесі шешімге қол жеткіземіз (13):

$$Q|j_1j_2j_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi j_3}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi(j_2+j_3 2^{-1})}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi(j_1+j_2 2^{-1}+j_3 2^{-2})}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi(j_2+j_3 2^{-1})}\\ e^{i\pi j_3}\\ e^{i\pi\left(j_2+\frac{3}{2}j_3\right)}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi(j_1+j_2 2^{-1}+j_3 2^{-2})}\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi(j_1+j_2 2^{-1}+j_3 2^{-2})}\\ e^{i\pi(j_2+j_3 2^{-1})}\\ e^{i\pi(j_1+\frac{3}{2}j_2+\frac{3}{4}j_3)}\\ e^{i\pi j_3}\\ e^{i\pi(j_1+\frac{1}{2}j_2+\frac{5}{4}j_3)}\\ e^{i\pi\left(j_2+\frac{3}{2}j_3\right)}\\ e^{i\pi(j_1+\frac{3}{2}j_2+\frac{7}{4}j_3)}\end{pmatrix}$$

Енді табылған (13) бойынша $|001\rangle$ күйі үшін ФКТ – і арқылы жаңа кванттық күйді анықтай аламыз.

$$Q|001\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\pi(j_1+j_2 2^{-1}+j_3 2^{-2})}\\ e^{i\pi(j_2+j_3 2^{-1})}\\ e^{i\pi(j_1+\frac{3}{2}j_2+\frac{3}{4}j_3)}\\ e^{i\pi j_3}\\ e^{i\pi(j_1+\frac{1}{2}j_2+\frac{5}{4}j_3)}\\ e^{i\pi\left(j_2+\frac{3}{2}j_3\right)}\\ e^{i\pi(j_1+\frac{3}{2}j_2+\frac{7}{4}j_3)}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{\frac{i\pi}{4}}\\ e^{\frac{i\pi}{2}}\\ e^{\frac{i3\pi}{4}}\\ e^{i\pi}\\ e^{\frac{i5\pi}{4}}\\ e^{\frac{i3\pi}{2}}\\ e^{\frac{i7\pi}{4}}\end{pmatrix} \quad (14)$$

Соңғы жауабын алу үшін вектордың әрбір мүшесін Эйлер теңдігі ($e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$) арқылы есептеп, мәндерін сәйкесінше орнына қойып анықтаймыз.

$$Q|001\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{\frac{i\pi}{4}}\\ e^{\frac{i\pi}{2}}\\ e^{\frac{i3\pi}{4}}\\ e^{i\pi}\\ e^{\frac{i5\pi}{4}}\\ e^{\frac{i3\pi}{2}}\\ e^{\frac{i7\pi}{4}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}354\\ 0{,}25+0{,}25i\\ 0{,}354i\\ -0{,}25+0{,}25i\\ -0{,}354\\ -0{,}25-0{,}25i\\ -0{,}354i\\ 0{,}25-0{,}25i\end{pmatrix} \quad (15)$$

(15) шешімін кванттық күйде жазатын болсақ, жауабы келесі түрде болады (16):

$$Q|001\rangle = (0{,}354|000\rangle + (0{,}25+0{,}25i)|001\rangle + 0{,}354i|010\rangle + (-0{,}25+0{,}25i)|011\rangle - 0{,}354|100\rangle + (-0{,}25-0{,}25i)|101\rangle - 0{,}354i|110\rangle + (0{,}25-0{,}25i)|111\rangle)$$

Қорытынды

Жұмыс кванттық есептеулердің негізгі элементтері болатын кубиттер үшін кванттық Фурье түрлендіруінің қолданылуына арналған.

Жұмыста негізгі анықтамалар, негізгі операторлар, дәлірек айтқанда, Адамар операторының пайдаланылуы келтірілген, сонымен қатар, матрицалардың тензорлық көбейтулерінің анықтамасы келтірілген.

Бір айнымалы дискретті Фурье түрлендіруі бойынша Фурьенің кванттық түрлендіруі арқылы екі кубит және үш кубиттің түрлендіруі зерттелген және нәтижесі тензорлық көбейту арқылы матрица түріне келтірілген.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Nielsen, MA., Chuang, IL.: Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press. 2011. 676
2. Sakk, E., 2021, 'Quantum Fourier Operators and Their Application', in J. M. V. Arcos (ed.), Real Perspective of Fourier Transforms and Current Developments in Superconductivity, IntechOpen, London. 10.5772/intechopen.94902.
3. Daan C., Roel Van B., Chao Y., 2020, Quantum Fourier Transform Revisited, Computational Research Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, CA, United States. https://arxiv.org/abs/2003.03011