

СҰЙЫҚ ОРТА ҮШІН 3D МОДЕЛЬДЕУ**Бауыржанқызы Аружан**bauyrzhanovaaruzhan@gmail.com

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ математикалық және компьютерлік модельдеу кафедрасы
механика-математика факультетінің 4-курс студенті
Қазақстан, Нұр-сұлтан қаласы

Ғылыми жетекшісі – Б.С.Шалабаева

Қазіргі заманда компьютерлік графика саласының өркендеуіне байланысты әрдайым өзекті болатын мәселелердің бірі – сұйықтықтарды модельдеу және оны визуализациялау болып табылады. Сұйықтықтың шынайы анимациясын жасау үшін есептеу гидродинамикасы жан-жақты қолданылатыны мәлім, мәселен қарапайым судың қозғалысы, бу, сарқыраманың ағуы, қанның тамырдағы қозғалысы және т.б. Соңғы жылдары сұйықтықты модельдеу көптеген салаларда, атап айтсақ робототехникадан бастап киноиндустрия мен медицина салаларында, компьютерлік ойындар, VR /AR бағдарламалары үшін, виртуалды симуляторлар бағдарламаларында, зертханалық жұмыс пен үшөлшемді сурет көрмелерінде пайдаланылып келеді. Сондықтан да сұйық орта үшін үшөлшемді модельдеу – әрқашан да өзекті тақырып болып есептеледі, ашылатын жаңалықтары көп деуге болады.

Unity бағдарламалық жасақтамасының көмегімен сұйық ортаны үшөлшемді модельдеп, оны жеке симулятор ретінде визуализациялауға болады. Модельдеу үшін гидродинамиканың тегіс бөлшектердің гидродинамикасы(SPH) әдісін пайдаланамыз. Бұл әдіс кез-келген сұйықтық қасиеттерін пайдалана отырып, оның бөлшектерін жасау үшін «тегістеу» жүргізетін ядро функциясына негізделеді. Былайша айтқанда, егер ядро функциясы тегістелсе, онда сұйықтықтың жаңа бөлшектері тығыздық пен қысымды сұйықтық бөлшектеріне қосу арқылы пайда болады. Ал егер сұйықтықтың екі бөлшегі соқтығысса, онда екі бөлшектің тығыздығы ұлғаяды, кейін тығыздықтағы бұл өзгерісті қысым анықтайды да, сонымен қатар ол да ұлғаяды.

Тегіс бөлшектердің гидродинамикасы (SPH) аясында сұйықтық бөлшектерінің қозғалысын тереңірек зерттеп және де оны шынайы түрде қызығырақ қолдану үшін Unity қозғалтқышы көмегімен интерактивті бағдарлама жасауға болады. Қолданушы тінтуір көмегімен Unity – де сұйықтық бөлшектерінің қалай өзара әрекетін жасайтынын бақылай алады.

Қазіргі уақытта Alice: Madness Return [5] компьютерлік ойын бағдарламасында сұйықтық бөлшектерінің қозғалысы әрекетін шамамен 10^4 бөлшектер арқылы модельденген болатын. Көптеген жағдайда, сұйықтықтардың қозғалысын модельдеу әртүрлі бейнекарталарда параллельді есептеу арқылы жасалған екен. Алайда бұндай есептеулердің бір кемшілігі – қоршаған ортамен сұйықтықтың әрекетінің өзара байланысы қандай деген сұрақтың туындамауы және экранда сұйықтықтың қозғалысын модельдеу нәтижелеріне әртүрлі әдістерді пайдаланып визуализациялаудың қолданылмауы деуге болады. Осы сұрақтарға жауап іздеуге және оған арнайы шешім қабылдап, зерттеулер жүргізуге ат салысып келе жатқан жаңа бағдарламалар мен жобалар қаншама.

Мәселен, бүгінгі таңда швейцариялық бағдарламалық қамтамасыз етуді әзірлейтін Aragon AG компаниясы физикалық процесстерді модельдеумен айналысады, 2017 жылы SIGGRAPH 2017 Real-Time Live! конференциясында Physics Forests деп аталатын бағдарламалық қозғалтқыштың(движок) демо-нұсқасын ұсынған болатын. Бұл қозғалтқыш 10 миллиондаған сұйықтық бөлшектерін шынайы уақыт аралығында сұйықтықты модельдей алады. Ол сұйықтықты модельдеудің жаңа бір тәсілі, басқа тәсілдерден айырмашылығы – Навье – Стокстың негізгі теңдеулерін бірден шешпей, оның орнына модельге негізделген сұйықтық бөлшектерінің мінез-құлқы туралы болжамдар жасайды.

Ал Мюнхендегі техникалық университеттің неміс ғалымдары Питер Кипфер мен Рюдигер Вестерман тегіс бөлшектердің гидродинамикасы(SPH) әдісін пайдаланып өзен ағысының қозғалысын модельдеген болатын. Ал Калифорниялық танымал программист-ғалым Такахиро Харада және басқа бағдарламалық әзірлеушілер заманауи GeForce 8800 GTX графикалық процессорларын пайдаланып, сұйықтық бөлшектерінің қозғалысы үшін секундына 17 кадр жылдамдықпен жуықтағанда 49153 бөлшек қозғалысын қолданды.

Осылайша, көптеген зерттеулер бойынша, сұйықтық қозғалысы шынайы уақытта емес, басқаша айтқанда кейінге қалдырылған есептеулер бойынша жүргізіледі. Алайда кейбір бағдарламаларда сұйықтық қозғалысын шынайы уақытта жүргізу қажеттілігі туындайды, яғни бұл дегеніміз – есептеу және ортаға әрекет ету бір уақытта болады. Кейінге қалдырылған есептеулер жүргізу туралы көптеген зерттеулер мен шешімдер қабылданды. Ал шынайы уақытта есептеулер жүргізу бойынша бұл мәселе сұйықтық қозғалысын модельдеу үшін өзекті болып табылады. Мақала мақсаты: графикалық процессорда сұйықтық қозғалысын үшөлшемді модельдеу алгоритмі – бұл сұйықтық бөлшектерінің қозғалысын аналитикалық есептеумен қатар, Unity бағдарламалық жасақтамасының көмегімен сұйық ортаны үшөлшемді модельдеп, оны жеке симулятор ретінде визуализациялау.

Тегіс бөлшектердің гидродинамикасы (SPH) әдісі арқылы сұйық ортаны модельдеу.

Тегіс бөлшектердің гидродинамикасы (SPH) әдісі алғаш рет астрофизикалық асимметриялық құбылыстар туралы есептерді шешу үшін 1977 жылғы Люси Л.Б. және Гингольд Р.А., Монаган Д.Д. ғалымдардың еңбектерінде сипатталған болатын. Олар SPH әдісін қолдана отырып, интерполяциялық формулаларды аналитикалық дифференциалдау арқылы кеңістіктік туындыларды есептей алды. Бұл тәсіл басқа тәсілдерге қарағанда айтарлықтай үлес қосты, мәселен ұяшықтықтағы бөлшектер(ағыл. Particle in Cell) әдісінде кеңістіктегі туындыларды есептеу үшін әрбір ұяшықтың құрылымы пайдаланылады. Сонымен қатар бөлшектердің ерекше атрибуттары, атап айтсақ импульс немесе қысым градиенттері дифференциалдық теңдеулер жиынтығы көмегімен есептеледі.

SPH әдісі бөлшек деп аталатын, сұйықтықты дискретті элементтерге бөліп отырып сұйықтық бөлшектерін алады.

Ендігі мәселе – SPH әдісі көмегімен сұйықтықты модельдеуді қалай жүзеге асыра аламыз. Ол үшін келесі бөлімде бұл әдісті реализациялайтын қажет кілттік факторлар ескеріледі: Кернель функциясы, тегістеуші радиус, шеттік шарттар, жақын көршілес нүктелерді іздеу әдісі және уақыт қадамын бағалау.

Тегіс бөлшектердің гидродинамикасы (SPH) әдісі негіздері.

Жоғары бөлімде айтылғандай SPH әдісі – бұл интерполяция әдісі. Ол функцияны мәндері тұрғысынан реттелмеген нүктелер(бөлшектерді) жиынтығы көмегімен өрнектеу үшін пайдаланады. Кез-келген $A(r)$ функциясының интегралды интерполяцияланған көрсеткіші келесідей табылады(1):

$$A(r) = \int_{\Omega} A(r')W(r - r', h)dr' \quad (1)$$

бұндағы интегралдау барлық Ω кеңістігі бойынша жүргізіледі, ал r – бұл кеңістіктегі кез-келген нүкте, W – бұл ұзындығы h болатын тегістеуші функция не тегістеуші ядро болып табылады.

Тегіс бөлшектердің гидродинамикасында әрбір сұйықтықтың элементі үшін координаталар, жылдамдық пен тығыздық бар болады. Нақты бір нүктедегі шама мәнін табу үшін барлық жан-жақтағы бөлшектердің жалпы қосындысын табамыз(2):

$$A(r) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(r - r_b, h) \quad (2)$$

бұндағы, b – бөлшек, ал қосынды барлық бөлшек бойынша жүргізіледі. b бөлшегі келесі атрибуттарға ие: m_b – масса, r_b – b -шы бөлшектің кеңістіктегі орны, ρ_b –тығыздық, v_b –бөлшектің жылдамдығы, $A_b - r_b$ нүктесіндегі A шамасының мәні.

Келесіні білу маңызды: дифференциалданатын функция интерполяторын дифференциалданатын ядро арқылы оның бөлшектеріндегі(интерполяция нүктелеріндегі) мәндерінен алуға болады(Monaghan, 1992). Осылайша, бұл интерполятордың кез-келген туындыларын қарапайым дифференциалдау көмегімен алуға болады, бұл дегеніміз торлар әдісі немесе ақырлы айырымдар әдісінің қажеттігі туындамайтынын білдіреді.

Тегіс бөлшектердің гидродинамикасында(SPH) ескерілетін кейбір «алтын» ережелер алдыңғы зерттеулер кезеңінде ұсынылған болатын[1]: әрдайым болжам ретінде ядро гаусстық болсын деп ескерейік және операторлар ішіне кіргізілген тығыздығы бар формулаларды жазу керек. Бірінші ереже - гаусстық ядролар, олар жақсы математикалық қасиеттерге ие екені мәлім, олар экспоненциалды функциялардың бағалауын қажет етеді, бұл туралы басқа бөлімде айтылады. Екінші ереже, жиі заманауи SPH – те қолданылады, бұл өріс шамасының градиенті бойынша жоғары дәлдікті алуға мүмкіндік береді [2].

Бөлшекке әсер ететін қысым тегіс бөлшектердің гидродинамикасы(SPH) әдісінің маңызды бөлігі болып табылады. Себебі бұндай қысым бөлшектің бір-біріне деген әсерін білдіреді, сонымен қатар, модельдеудің мінез-құлқына әсерін тигізеді. Бөлшекке әсер ететін қысымды есептеу үшін, алдымен тығыздықты есептеу қажет, кейін қысымды идеалды газ күйінің теңдеуі көмегімен табуға болады $p = k\rho$, бұндағы k – газдың қатандық тұрақтысы, оған сұйықтықтағы бөлшектер мөлшері немесе температура әсер етуі мүмкін. Алайда, тыныштық тығыздығын ескере отырып, қысымды анықтау үшін модификацияланған теңдеу $p = k(\rho - \rho_0)$ түрге жазылды[3]. Бұндағы ρ_0 – еркін күйдегі сұйықтық тығыздығы.

Сұйықтық бөлшектері топтасқан әсер көрсетеді, сонымен қатар тыныштық күйдегі тұрақты масса тығыздығы болады. Егер әрбір бөлшекке әсер ететін қысым белгілі болса, SPH ережелерін i -ші бөлшектік $-\nabla p$ қысым шамасына қолдансақ, келесідей формула аламыз:

$$P_i = -\nabla p(r_i) = - \sum_{j \neq i} m_j \frac{p_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (3)$$

Алайда, бұл екі бөлшектің өзара әрекеттесуінен симметриялық күш болмайды. Бұл сұйықтық бөлшектерінің бір-бірін тек өзіндік күштерін есептеу үшін қолданатынан болады. Келесідей өзгеріске ұшырайды (4):

$$P_i = - \sum_{j \neq i} m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (4)$$

Қысымды есептеу тек қана тез және тұрақты емес, сонымен қатар, егер өзара әрекеттесетін бөлшектер арасында орташа арифметикалық қысым болса, онда симметрия қамтамасыз етіледі[3].

Тұтқырлықты есептеу – тегіс бөлшектер гидродинамикасында(SPH) ескеруге тұрарлық тағы бір маңызды және қажет факторлардың бірі болып есептеледі. Әрбір сұйықтықтың түрінде өзіндік тұтқырлық күші болады, мысалы, су майға қарсы, және де бұл тиімді модельденуі қажет. Тұтқырлық сұйықтық ағынына қарсылық ретінде анықталады, ал SPH – те μ тұтқырлық коэффициенті сұйықтықтың тұтқырлық күшін анықтайды. Тегіс бөлшектер гидродинамикасы (SPH) терминдерінде тұтқырлық күші ұғымы келесі түрде анықталады(5):

$$V_i = \mu \nabla^2 u(u_i) = \mu \sum_{j \neq i} m_j \frac{v_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, h) \quad (5)$$

Қысым күші сияқты, бұл сонымен қатар бөлшектер арасындағы жылдамдық өрісінің айырмашылығына байланысты ассиметриялық күш болып табылады. Күшті есептеу үшін жылдамдықтар айырымы бар ұқсас формула келесідей анықталады[3](6):

$$V_i = \mu \sum_{j \neq i} m_j \frac{v_j - v_i}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, h) \quad (6)$$

Бұл формула арқылы симметрияға қол жеткізіледі, себебі тұтқырлық күштері абсолютті жылдамдықтардан емес, тек қана жылдамдықтар айырымынан тәуелді. Тегіс бөлшектер гидродинамикасын (SPH) жүзеге асыруға қажет кейбір теңдеулер осы бөлімде айтылып кетті, ал SPH тәсілін модельдеу цикліне псевдокод алгоритмі келесідей жаза аламыз:

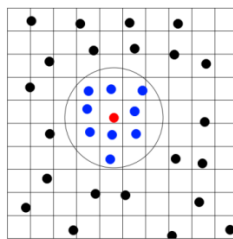
```

1:   for all bolshekter i do
2:       find korshiles j
3:   for all bolshekter i do
4:        $\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}$ 
5:       compute  $p_i$  using  $\rho_i$ 
6:   for all bolshekter i do
7:        $F_i^{qysym} = -\frac{m_i}{\rho_i} \nabla p_i$ 
8:        $F_i^{tutqurlyq} = -\frac{m_i}{\rho_i} \nabla^2 v_i$ 
9:        $F_i^{basqa} = m_i g$ 
10:       $F_i(t) = F_i^{qysym} + F_i^{tutqurlyq} + F_i^{basqa}$ 
11:   for all bolshekter i do
12:        $v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \frac{\Delta t F_i(t)}{m_i}$ 
13:        $x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta t v_i(t + \Delta t)$ 

```

Бұл алгоритм көмегімен тұтас орта гидродинамикасы әдісімен сұйық ортаны үшөлшемді модельдеуге пайдалануға болады. Осы алгоритм күй теңдеуін қолданғандықтан, оны *SPH күй теңдеуі* (State-Equation SPH (SESPH)) деп те атауға болады.

Тұтас орта гидродинамикасы әдісінде сұйықтық бөлшектерінің арасындағы күштерді тиімді түрде есептеу үшін – жақын көршілес нүктелерді іздеу әдісін пайдаланамыз. Сурет – 1 –де көрсетілгендей, жақын көршілес нүктелерді іздеу әдісі төтенше жағдайда шығыны көп жұмысты қажет етеді деуге болады, себебі сұйықтықтың қозғалысын модельдеген кезде әрбір сәтті(кадр) өңдеу үшін кететін уақыт шығыны көп. Бұндай шығынға ұшырамау үшін кеңістікті декомпозициялау әдісін қолданған дұрыс деп есептеймін. Яғни, бізге нақты керек сұйықтықтың бөлшек экземплярларын іздеу үшін, былайша айтқанда, барлық сұйықтық бөлшектерін ақтармаймыз, тек қана қажет бөлшекті іздеп табамыз.



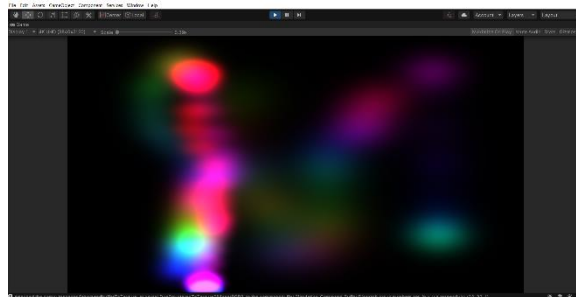
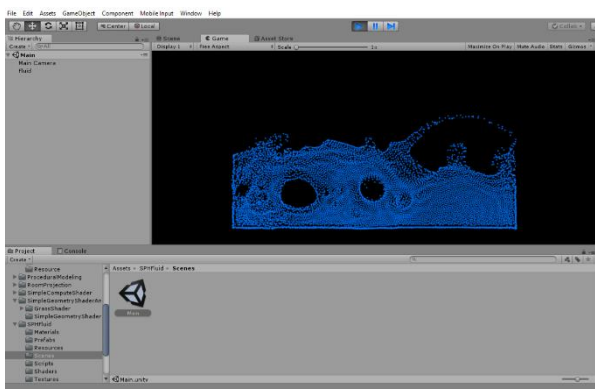
Сурет 1.: Жақын көршілес нүктелерді іздеу әдісі негізінде 2D тор: негізгі бөлшек қызыл түспен, көршілес бөлшектер көк түспен анықталған іздеу радиусы аймағында көрсетілген, қара бөлшектер болса қысым мен тұтқырлықты есептеу кезінде ескерілмейді.

Жақын көршілес нүктелерді іздеу әдісі үшөлшемді бірқалыпты торды қолданады, шектелген куб бөлшектерді және тор ұяшық беттерінің оңтайлы ұзындығын есептеуге арналған қос бөлу стратегиясын қамтиды.

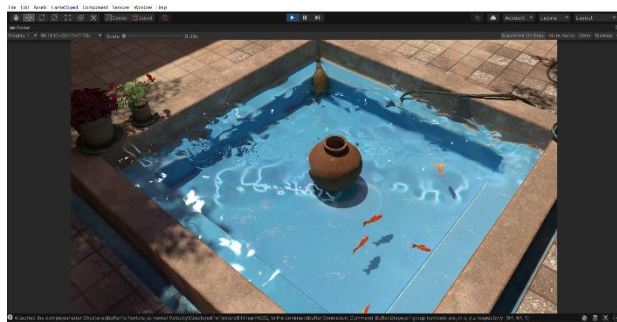
Жиынтық сұрыптау операцияларын орындаудың шығындарын тек белгілі бір сұраныс(запрос) нүктелерін пайдалану арқылы азайтуға болады, бұл өз кезегінде қашықтықты есептеудің қажетті санын азайтады[4]. Тағы бір танымал әдіс - бұл кеңістіктік хэштеу, оның тиімділігі - әрбір тор ұяшығын көрсету үшін бірегей хэш кілттерінің жасалу жылдамдығымен шектеледі. Дегенмен, бірнеше хэш кілттері бір тор ұяшығына сәйкес келген кезде «хэш соқтығыстарын» болдырмау үшін сақ болған жөн[2]. Сақталған мәндерді құру

және оларға қол жеткізу үшін кесу деректер құрылымы мен графикалық процессорды(GPU) пайдалану арқылы есептеу кеңістігі бірнеше 2D жазықтықтарға және индекске бөлінеді және кейбір бөлшектердің жиынтығы таралуына сәйкес келетін динамикалық тор құрастырылады[5].

Бағдарламалық реализация нәтижелері:



Сурет 2-3. SPH әдісі көмегімен жасалған сұйықтық бөлшектерімен интерактивті әрекет ету.



Сурет 4. Сұйық ортаны 3D визуализациялау.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. Monaghan, J. J. (1992). Smoothed particle hydrodynamics. Annual review of astronomy and astrophysics, 30:543–574.
2. Kelager, M. (2006). Lagrangian fluid dynamics using smoothed particle hydrodynamics. University of Copenhagen. Denmark.
3. Müller, M., Charypar, D., Gross, M.: Particle-based fluid simulation for interactive applications. In: Proc. of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, pp. 154–159 (2003)
4. Zhao, J., Long, C., Xiong, S., Liu, C., and Yuan, Z. (2014). A new k nearest neighbours algorithm using cell grids for 3d scattered point cloud. Elektronika ir Elektrotechnika, 20(1):81–87.
5. Harada, T., Koshizuka, S., and Kawaguchi, Y. (2007). Sliced data structure for particle-based simulations on gpus. Proceedings of the 5th international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australia and Southeast Asia.

ОӘЖ 532

КРИПТОВАЛЮТА ҚҰНЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Ербаянова Дария Алибековна, Мейрамбек Ұлдана Жалғасбекқызы
e.dariya18@mail.ru, uldana.meirambek@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Қ.Р.Есмаханова