

УДК 532.529

Математическая модель динамики нескольких капель под действием электромагнитного поля

Аушахманов Ильяс Жанатович

ilyas_75@mail.ru

Магистрант 2-го курса обучающийся по образовательной программе 7М06105 – «Математическое и компьютерное моделирование»
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – Шалабаева Б.С.

Изучение особенностей поведения отдельных капель одной вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей (тепловых, акустических, электромагнитных) имеет важное значение при решении технологических задач в разных отраслях промышленности. И поэтому огромное число ученых со всего мира занимались и занимаются исследованиями различных аспектов этой задачи и внесли свой вклад в решение проблемы.

В теоретических работах предлагаются самые разные математические модели для моделирования процесса воздействия электрического поля на эмульсионные капли. Область применимости каждой из моделей ограничена определенными условиями и поэтому возникает проблема выбора модели, которая будет адекватно описывать рассматриваемый

физический процесс. Вторая проблема заключается в том, что, даже используя самые простые математические модели, как правило, невозможно получить результат вручную без использования компьютера. Таким образом, особую значимость приобретает разработка компьютерных программ, которые с использованием современных численных методов будут решать уравнения математической модели (алгебраические или дифференциальные), визуализировать полученные решения и в итоге будут способствовать автоматизации процесса численного моделирования.

Для построения математической модели динамики напряженности электрического поля вблизи двух капель рассматривались силы взаимодействия между этими каплями, а также для описания распределения электрической напряженности рассматривалось уравнение Лапласа в сферических координатах. Для компьютерного моделирования поставленной задачи использовался программный пакет COMSOL Multiphysics.

Программный пакет COMSOL Multiphysics позволил провести визуализацию динамики электрической напряженности, как диэлектрической среды, так и взаимодействие между двумя каплями, при различных диэлектрических средах. Одномерные симуляторы решают численно нелинейные алгебраические уравнения (в случае постоянного электрического поля)

Проведены предварительные численные расчеты с использованием разработанных программных продуктов при различных значениях физических параметров капель и окружающей среды, а также параметров электрического поля. Все программные продукты продемонстрировали свою работоспособность и достаточную эффективность, полученные результаты хорошо согласуются с физическими представлениями.

1. Физическая постановка

Рассматривается эмульсия, состоящая из сферических капель одной вязкой несжимаемой жидкости, распределенных в объеме другой вязкой несжимаемой жидкости, несмешивающейся с первой. Обе жидкости считаются диэлектрическими. Эмульсия помещена между двумя электродами, создающими электрическое поле (Рисунок 1).

В статье рассмотрена динамика двух капель под действием электрического поля. Предполагается, что капля в форме шара и с радиусом r будет помещена в электрическое поле с напряженностью $E \vec{}$, будем рассматривать, как капли будут реагировать друг на друга под действием электрического поля. Начальное состояние капель в электрическом поле изображено схематично на рисунке 1.

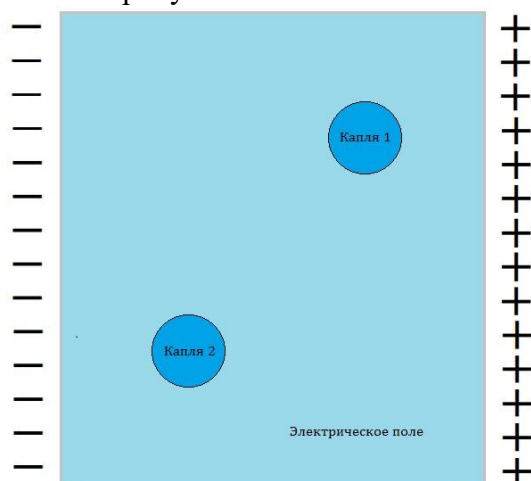


Рисунок 1 Начальное состояние капель в электрическом поле

1.2 Взаимодействие двух эмульсионных капель

Рассмотрим две сферические эмульсионные капли i и j одинакового диаметра $d = 2a$, расстояние между которыми R_{ij} (Рисунок 2). Предполагается, что капли не оказывают

существенного влияния на распределение поляризованных зарядов в них и используя приближение точечного диполя, электростатическую силу, действующую на i -ую каплю со стороны j -ой капли, можно определить по формуле:

$$\vec{F}_{ij}^e = [(\vec{p}_i \cdot \nabla) \vec{E}_j]_{x=0}, \quad (1.1)$$

где \vec{p}_i – эквивалентный дипольный момент i -ой капли (определяется по формуле $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_c\beta a^3 E_0 \vec{e}_z$,

\vec{E}_j – напряженность электрического поля j -ой капли (вычисляется через электростатический потенциал среды из формулы

$$\varphi_c = -E_0 r \left[1 - \beta \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \theta.$$

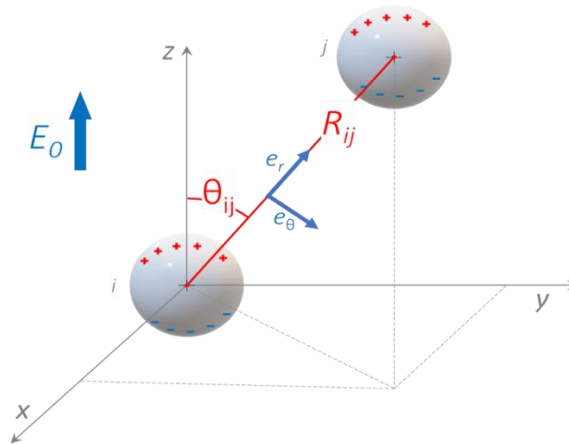


Рисунок 2 Взаимодействие двух эмульсионных капель

2. Математическая модель динамики нескольких капель под действием электромагнитного поля.

Рассмотрим теперь эмульсионную систему, состоящую из двух сферических капель одинакового диаметра d , помещенную во внешнее электрическое поле. Движение i -ой частицы описывается следующим уравнением:

$$m \frac{d^2 R_i}{dt^2} = F_{ij}^e(R_{ij}, \theta_{ij})$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_x^e \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_y^e \end{cases} \quad (1)$$

где R_{ij} – радиус-вектор центра i -ой капли,

$m = \frac{1}{6} \pi d^3$ – масса капли,

Для решения нашей задачи (1) необходимо научиться считать силу электрического взаимодействия между двумя каплями, которая определяется по формуле (2), т.е.

$$\vec{F}_{ij}^e = F_0 \left(\frac{d}{R_{ij}} \right)^4 [(3 \cos^2 \theta_{ij} - 1) \vec{e}_r + \sin 2\theta_{ij} \vec{e}_\theta] \quad (2)$$

Эта сила зависит от двух параметров: расстояния между каплями R и угла θ , который между направлением электрического поля и прямой, соединяющей центры этих капель (схематично на рисунке 3).

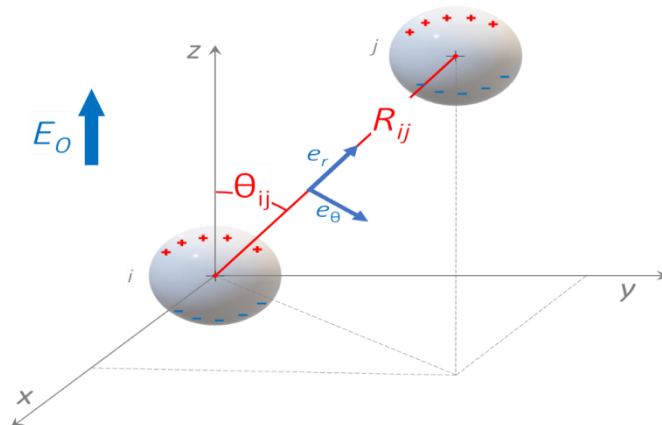


Рисунок 3

3. Компьютерная модель напряженности электрического поля вблизи капли, с использованием программного пакета Comsol Multiphysics®

COMSOL Multiphysics, как следует из названия, предлагает имитацию и моделирование элементов Multiphysics. Например, вы строите машину, в которой есть элементы электромагнитной индукции и теплопередачи. Таким образом, вы можете легко смоделировать оба типа физики, построив модель для вашей машины. Это также дает вам доступ к предопределенным библиотекам материалов в различных областях физики, а также вы можете добавлять собственные материалы. Это в основном CAD или Maya, но для физиков. Вы можете работать в таких областях физики, как Электростатика, Полупроводники, Электромагнетизм, Теплообмен, Поток жидкости.

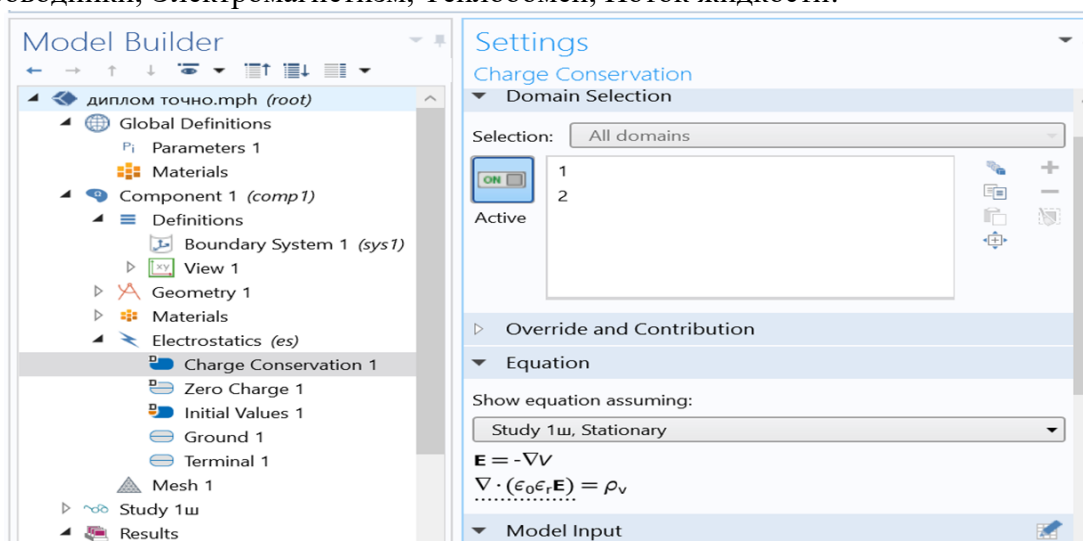


Рисунок 4. Электрический потенциал.

На рисунке 4 можно увидеть уравнение, которое реализовано в программном пакете COMSOL Multiphysics, где:

ϵ_0 – электрическая проницаемость.

ϵ_r – данные наших материалов.

ρ_v – плотность распределения свободных электрических зарядов.

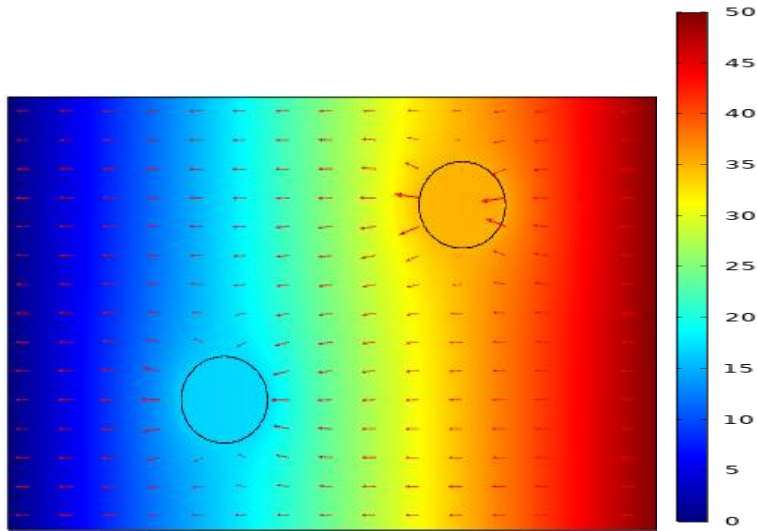


Рисунок 4.1. Электрический потенциал.

На рисунке 4.1 изображен электрический потенциал нашей модели с изначально заданным диапазоном от 0 до 50V. Для дальнейшего анализа полученного результата, построим другие типы графиков.

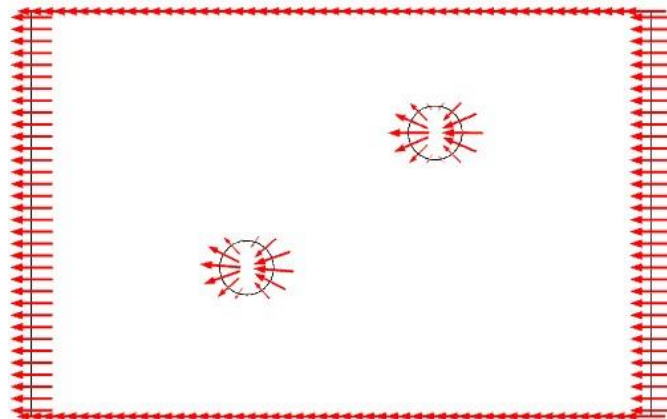


Рисунок 4.2. Направление вектора напряженности электрического поля \vec{E} .

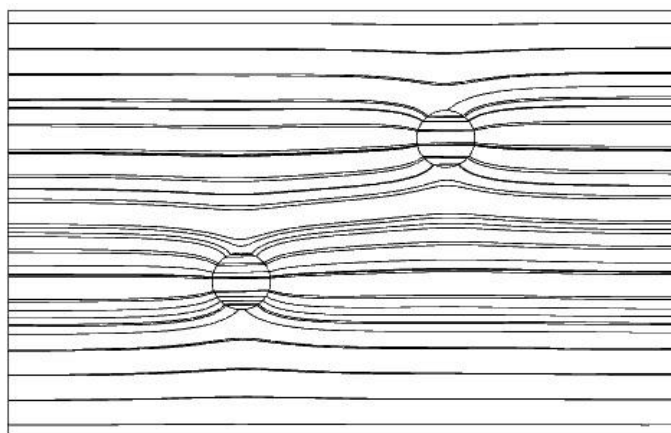


Рисунок 4.3. Искривления электрического поля.

Для компьютерного моделирования модели динамики двух капель под действием электрического поля использовался программный пакет COMSOL Multiphysics. Все программные продукты были согласованы с аналитическими решениями задачи и показали свою эффективность в согласии с физическими представлениями данного процесса.

Были получены результаты, позволяющие понимать физическую природу и закономерности влияния электрического поля на влияние нескольких капель.

Список использованных источников

1. Mandal Sh., Chakraborty S. Effect of uniform electric field on the drop deformation in simple shear flow and emulsion shear rheology // Journal of Physics of Fluids. – 2017. – Vol. 29, Issue 7. – P. 072109
2. Ahn K.H., Klingenberg D.J. Relaxation of polydisperse electrorheological suspensions // Journal of Rheology. – 1994. – Vol. 38, Issue 3. – Pp. 713-741. – DOI: 10.1122/1.550482
3. Parthasarathy M., Klingenberg D.J. Electrorheology: mechanisms and models // Material Science and Engineering: R: Reports. – 1996. – Vol. 17, Issue 2. – Pp. 57-103. – DOI: 10.1016/0927-796X(96)00191-X
4. Введение в Comsol <https://www.comsol.ru/comsol-multiphysics>.
5. Часть 1: Выбор направления модели: Пространство, физики, изучение COMSOL Multiphysics 1998–2018.
6. Часть 2: Структура модели: создать геометрию, добавить физику, выбор материалов. Multiphysics 1998–2018.