УДК 517.51

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАЧАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУР ИЗ КЛАССОВ ФУНКЦИИ $\boldsymbol{U_2(\beta, \theta, \alpha)}$.

Фазыл Жебей Ғабиденұлы
zhebei290199@mail.ru
Магистрант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Наурызбаев Н. Ж.

Аннотация

Любое явление в мире, любой процесс, абсолютно все описывается математикой. В первую очередь строят математическую модель этого процесса, потом начинают изучать эту же модель всеми “Средствами” математики. Результатом этих исследовании или решением будет информация представимая в виде чисел, и не всегда конечных. Появление электронных вычислительных машин (ЭВМ) дало хороший стимул к применению описанных выше математических методов при решении задач практического характера (уравнения математической физики и т.д.). Как и сказано ранее, не всегда решения представляются в виде конечных чисел. В таких ситуациях полученные решения будут приближаться объектами конечного вида, что не всегда в силах ЭВМ. Одним из эквивалентов сказанного выше является компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П).

В данной работе получена оценка сверху при дискретизации решений уравнения теплопроводности в рамках задачи К(В)П.

Приведем задачу компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П-1) ([1]).

Пусть X и Y – нормированные пространства числовых функции, Ω и Ω_1- области определения X и Y соответственно, $F \subset X$ и отображение $Tf = u(y, f)$ $(T: F \to Y)$.

Обозначим через $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ $(\forall N \geq 0, N \in Z)$ множество всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$, в котором содержится набор из N функционалов

$$l^{(N)} = \left(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}\right), \qquad l_N^{(j)}(\cdot): F \to C \quad (j = 1, \dots, N)$$

и функции

$$\varphi_N\,(\tau_1, \dots, \tau_N\,;\, y): C^N \times \Omega_1 \to C$$

- алгоритма переработки числовой информации с объемом N. При фиксированных $\tau_1,\ldots,\tau_N$ функция $\varphi_N\ (\tau_1,\ldots,\tau_N\ ;\ y) \in Y$.
Для пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ положим

$$\delta_N\ \left(\left(l^{(N)}, \varphi_N\right);\ T;\ F\right)_Y = \sup_{f\in F} \left\| u(\cdot;f) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f)\ ;\cdot\right)\right\|_Y.$$

Пусть $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ – некоторое множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$. Тогда величина

$$\delta_N(D_N;\ T;\ F)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \delta_N\left(\left(l^{(N)}, \varphi_N\right);\ T;\ F\right)_Y$$

- погрешность восстановления оператора Tf в метрике Y по всем вычислительным агрегатам из D_N по информации об $f \in F$. Определимся с терминологией: в случае $Tf = f$ речь будет идти о восстановлении функций, если же $Tf = u(y, f)$ решение уравнения в частных производных с теми или иными начальными и граничными условиями, то – о дискретизации этих решений.
Записи $A \ll B$ и $A \asymp B$ соответственно означают $|A| \leq cB$ и одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$.
Задача заключается получении порядковых оценок для δ_N.
На основе этих результатов П.Л.Ульянова, Н.Темиргалиевым [2] были определены классы $U_s(\beta,\theta,\alpha,\psi)$ функций $f(x) = f(x_1,\ldots,x_s)$, 1-периодических по каждой из s $(s = 1,2,\ldots)$ переменных и таких, что $(\bar{y} = \max\{|y|;1\})$:

$$|\hat{f}(m)| \leq \prod_{j=1}^{s}(\bar{m}_j)^{\beta_j}\,\theta_j^{\bar{m}_j^{\alpha_j^{-1}}}\ \psi_j^{(\bar{m}_j)}\ (m \in Z^s),$$

где $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_s) \in R^s$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_s) \in (0,1]^s$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \in R^s$, $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_s)$ (здесь $\psi_j\ (j = 1,\ldots,s)$) - медленно колеблющиеся положительные функции т.е. такие, что для всякого $\delta \neq 0$ величина $\lim_{x\to\infty} x^{\delta}\psi_j(x)$ равно 0 или $+\infty$ смотря по тому $\delta < 0$ или $\delta > 0$ такие, что $\sum_{m\in Z^s}\prod_{j=1}^{s}(\bar{m}_j)^{\beta_j}\,\theta_j^{\bar{m}_j^{\alpha_j^{-1}}}\ \psi_j^{(\bar{m}_j)} < +\infty$, **а** $\hat{f}(m) = \hat{f}(m_1,\ldots,m_s)$ - тригонометрические коэффициенты Фурье

Данная работа посвящена задаче дискретизации решения уравнения теплопроводности с распределением начальных температур из класса $U_2(\beta,\theta,\alpha,1)$.
В работе К. Е. Шерниязова [3] рассматривалась конкретизация восстановления решений задачи Коши для уравнения теплопроводности по значениям функции распределения начальной температуры в конечном числе точек. Ш. У. Ажгалиевым и Е. Е. Нурмолдиным [4] рассматривались та же конкретизация, но с другими параметрами. Публикации по данной тематике различаются как по постановкам, так и, что интересно, по употребляемым названиям, по сути, одних и тех же математических объектов, и, конечно, по формулировкам результатов.

Здесь рассматривается следующая конкретизация задачи КВП:

$\Omega = [0,1]^2, \Omega_1 = [0,8) \times [0,1]^2, X = C[0,1]^2, Y = L^{\infty}[0,8) \times L^p[0,1]^2\ \ (2 \leq p \leq \infty),$

$$(Tf)(x) = u(t,x;f),$$

где $u(t,x;f)$ есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (t \geq 0, (x_1, x_2) \in R^2)$$

с начальным условием

$$u(0,(x_1,x_2);f) = f(x_1,x_2).$$

В качестве D_N возьмем множество Φ_N' всех пар $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ таких, что

$l_1(f) = \hat{f}\left(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}\right), \dots, l_N(f) = \hat{f}\left(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}\right)$ для некоторых $(m_1^{(1)}, m_2^{(1)})$, …, $(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}) \in Z^2$ и $\varphi_N\ (\tau_1, \dots, \tau_N\ ; t, (x_1,x_2)\ )$

В этом случае

$$\delta_N(\Phi_N', F)_Y = \inf_{(l_N,\varphi_N)} \sup_{f\in F} \left\| u(t,(x_1,x_2);f) - \varphi_N\ \left(\hat{f}\left(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}\right), \dots, \hat{f}\left(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}\right);\ t(x_1,x_2)\right) \right\|_Y,$$

где inf берется по всем парам (l_N, φ_N), состоящим из упорядоченного множества $A_N = \{(m_1^{(1)}, m_2^{(1)})$,…, $(m_1^{(N)}, m_2^{(N)})\} \subset Z^2$ и произвольной функции $\varphi_N\ (\tau_1, \dots, \tau_N\ ; t(x_1,x_2)\ )$.

Пусть даны $0 < \theta_1, \theta_2 <1$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 > 0)$ и β_1, β_2 из R. Тогда существует число $h > 0$, такое, что $\theta_1 = e^{-h}$ и $\theta_2 = e^{-hc}$, где $c = \log_{\theta_1} \theta_2 \geq 1$. Для положительного ρ положим

$$E_\rho = \left\{ m = (m_1,m_2) \in Z^2 \colon e^{-h\left(\overline{m_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} + c\overline{m_2}^{\frac{1}{\alpha_2}}\right) \geq e^{-h\rho}} \right\} \equiv \left\{ m = (m_1,m_2) \in Z^2 \colon \overline{m_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} + c\overline{m_2}^{\frac{1}{\alpha_2}} \leq \rho \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть дано положительное целое число ρ. Тогда для количества точек $|E_\rho|$ множества E_ρ верно соотношение*

$$|E_\rho| \asymp \rho^{\alpha+\beta}$$

Лемма 2. *Пусть функция f принадлежит классу $U_2((\beta_1,\beta_2),(\theta_1,\theta_2),(\alpha_1,\alpha_2))$, где $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$. Тогда ее ряд Фурье-Лебега*

$$\sum\nolimits_{(m_1,m_2)\in Z^2} f(m_1,m_2) e^{2\pi i(m_1x_1 + m_2x_2)}$$

сходиться абсолютно.

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть даны* $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in R^s$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^s$ *и* $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0,1)^2$ *и* 2<p<∞. *Тогда выполнено соотношение*

$$\delta_N(\Phi_N, U_2(\beta, \theta, \alpha, 1)_{L^2} =$$

$$= \inf_{(l^{(N)}, \phi_N) \in \Phi_N} \sup_{f \in U_2(\beta, \theta, \alpha, 1} ||u(t, (x_1, \mathrm{x}_2); f)$$

$$- \phi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}; t, (x_1, x_2))||_{L^2[0,\infty) \times [0,1]^2} \underset{\theta_1, \theta_2}{<<}$$

$$\underset{\theta_1, \theta_2}{<<} N^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}} \theta_1^{\left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}} \log_{\theta_1} \theta_2.$$

Доказательство. Пусть N - целое положительное число. Положим ([…]– целая часть)

$$n = \left[\left(\frac{N c^{\alpha+\beta}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right], \tag{1}$$

где $A = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\beta} \frac{c^\alpha}{(\beta+1)} + \frac{c^\alpha}{2^\alpha} + \sqrt{c^{2\beta}\alpha^2 + \beta^2}$.

Тогда в силу леммы 2 выполняется соотношение

$$N' \equiv |E_n| < \frac{\left(\left(\frac{N c^{\alpha+\beta}}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right)^{\alpha+\beta} \cdot A}{c^{\alpha+\beta}} = N.$$

Определим линейные функционалы $l_1(f) = \hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, l_{N'}(f) = \hat{f}(m_1^{(N')}, m_2^{(N')})$,

где $\left\{(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, (m_1^{(N')}, m_2^{(N')})\right\}$ есть некоторое упорядочение множества E_n и далее (до N) – $l_{N'+1}(f) = \ldots = l_N(f) \equiv 0$.

Определим функцию $\phi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, (x_1, x_2))$:

$$\phi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, (x_1, x_2)) = \sum_{k=1}^N \tau_k e^{-4\pi^2 (m_1^{(k)} m_1^{(k)} + m_2^{(k)} m_2^{(k)}) t} e^{2\pi i (m_1^{(k)} x_1 + m_2^{(k)} x_2)}.$$

Таким образом, для каждой функции $f \in L(0,1)^2$ имеет место равенство

$$\phi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); t, (x_1, x_2)) = \phi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); t, (x_1, x_2)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N'} \hat{f}(m_1, m_2) e^{-4\pi^2 (m_1^{(k)} m_1^{(k)} + m_2^{(k)} m_2^{(k)}) t} e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} =$$
$$= \sum_{(m_1, m_2) \in E_n} \hat{f}(m_1, m_2) e^{-4\pi^2 (m_1^{(k)} m_1^{(k)} + m_2^{(k)} m_2^{(k)}) t} e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}.$$

Для функции f из класса $U_2((\beta_1,\beta_2);(\theta_1,\theta_2);(\alpha_1,\alpha_2))$ в силу леммы 2 ее ряд Фурье сходится абсолютно. Тогда

$$u-\phi_N=u(t,(x_1,x_2);f)-\phi_N(\hat{f}(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),\dots,\hat{f}(m_1^{(N)},m_2^{(N)});t,(x_1,x_2))=$$

$$=\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2\setminus E_n}\hat{f}(m_1,m_2)e^{-4\pi^2(m_1^{(k)}m_1^{(k)}+m_2^{(k)}m_2^{(k)})t}e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}.$$

Для каждого $(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E_k$, в силу определения множеств E_ρ, при $\rho=k$ выполнено неравенство

$$k+1\geq \overline{m}_1^{\frac{1}{\alpha_1}}+c\overline{m}_2^{\frac{1}{\alpha_2}}>k. \qquad (2)$$

Заметим еще, что

$$|E_{k+1}\setminus E_k| << k^{\alpha_1+\alpha_2-1}. \qquad (3)$$

Оценим разность $u-\phi_N$ в L^2 -норме. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\|u-\phi_N\|_{L^2}^2=\left\|u(t,x;f)-\phi_N(\hat{f}(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),\dots,\hat{f}(m_1^{(N)},m_2^{(N)});t,(x_1,x_2))\right\|_{L^2}^2=$$

$$=\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2\setminus E_n}\left|\hat{f}(m_1,m_2)\right|^2.$$

По определению класса $U_2((\beta_1,\beta_2);(\theta_1,\theta_2);(\alpha_1,\alpha_2))$

$$\|u-\phi_N\|_{L^2}^2\leq\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2\setminus E_n}e^{-2h(\overline{m}_1+c\overline{m}_2)}=\sum_{k=n}^{+\infty}\sum_{(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E_k}e^{-2h(\overline{m}_1+c\overline{m}_2)}.$$

Далее, в силу соотношений (2) и (3), получим

$$\|u-\phi_N\|_{L^2}^2\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\sum_{(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E_k}e^{-2hk}=\sum_{k=n}^{+\infty}e^{-2hk}\sum_{(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E}1<<$$

$$<<\sum_{k=n}^{+\infty}e^{-2hk}\,k<<n^{(\alpha_1+\alpha_2-1)}e^{-2hn}.$$

Используя равенство (1) получим,

$$\delta_N(\Phi_N,U_2(\beta,\theta,\alpha,1)_{L^2}\leq\|u-\phi_N\|_{L^2}<<N^{\frac{\alpha_1+\alpha_2-1}{2(\alpha_1+\alpha_2)}}\theta_1^{\left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\log_{\theta_1}\theta_2}.$$

что и требовалось доказать.

В заключении заметим, что при $\beta=(0,0)$, $\alpha=(1,1)$, по теореме имеем $\delta_N(\Phi_N,U_2(0,\theta,1,1)_{L^2}\ll \boldsymbol{N^{\frac{1}{4}}\theta_1^{\sqrt{\frac{N}{A}}\log_{\theta_1}\theta_2}}$, в то же время ее точный порядок есть

$\underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp} \boldsymbol{N^{\frac{1}{4}}\theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2}N\log_{\theta_1}\theta_2}}}$ (см. [2]). Данный порядок можно получить при более точной оценке количества точек в E_ρ: $|E_\rho| < \frac{\rho^2}{c} + 6\rho = N$.

Список использованных источников

1. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, 2010.
2. Нурмолдин Е.Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U_2 – классов Ульянова // Сиб. журн. вычисл. математики, РАН. Сиб.отд-ние. – Новосибирск, 2005. – Т.8, №4.
3. Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнений теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов *E, SW* и *B*. Кандидатская диссертация. КазГУ. Алматы. 1998.