УДК 517.52

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПРОСТРАНСТВУ ЛОРЕНЦА СУММЫ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мұхамбетжан Мәншүк Асылбекқызы
Manshuk-9696@mail.ru
Докторант 2 курсаЕНУ им. Л.Н . Гумилева,
Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель-Н.А. Бокаев,

Олжас Боран
Магистрант 2-го курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель-Н.А. Бокаев,

Рассмотрим на полуинтервале $[0,1)$ функцию

$$r_0(x)=\begin{cases}1 при x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\\ -1 при x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases},$$

И продолжим ее периодечески с периодом 1 на всю числовую ось. Определим функции $r_k(x)\equiv r_0(2^k x), k=0,1,2....$, представляющие собой сжатие функции $r_0(x)$ в 2^k раз. Функции $r_k(x)$ функциями Радемахера.

Систему функцй Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ мы получим в результате всевозможных перемножений между собой функций Радемахера. При этом договоримся о следующей нумерации функций Уолша (эту нумерацию принято называть нумерацией Пэли). Положим $w_0(x)\equiv 1$(x). Чтобы определить $w_n(x)$ при $n\geq 1$, представим натуральное число n в двоичной записи, т.е.

$$n=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i\ 2^{i}$$

Где $\varepsilon_k=1$ и $\varepsilon_i=0$ или 1 при i=0,1,…k-1. Очевидно $2^k\leq n\prec 2^{k+1}$, гдеk=k(n). Положим

$$w_n(x)=\prod_{i=0}^{k}\left(r_i(x)\right)^{\varepsilon i}_{\varepsilon}=r_k(x)\prod_{i=0}^{k-1}(r_i(x))^{\varepsilon i}$$

Таким образом, функции систему Уолша принимают лишь два значения:1 и -1. В точках разрыва они непрерывны справа.

Пусть f интегрируемая на [0,1] функция с рядом Фурье-Уолша

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,w_n(x),$$

где $w_n(x)$ - система Уолша [1] и $a_n=\int f(t)\,w_n(t)dt$ -коэффициенты Фурье-Уолша

Известна следующая теорема [1].

Теорема А. Для того чтобы ряд $\sum_{m=0}^{\infty}a_n\,w_n(x)$, где $a_n\downarrow 0$ был рядом Фурье-Уолша некоторой функции $f\in L^p[0,1]$, 1<p<∞ необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{p-2}\prec\infty$

Определение:

f- измеримая функция на Ω

Функция f* (t)=inf$\{\sigma:m(\sigma,f)\le t\}=\inf\{\sigma:\mu\{x;|f(x)>\sigma|\}\le t\}$

0<t<∞ называется невозрастающей перестановкой функции f

Пусть $1\le p$, $q<\infty$. Пространство Лоренца $L_{p,q}[0,1]$ определяется как множество измеримых функций для которыхконечна норма

$$\|f\|_{Lp,q}=\left\{f(t^{1/p-1/q}f*(t)^q dt\right\}^{1/q}<\infty$$

Дискретные пространства Лоренца l(p,q) определяется как множество последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ для которых

$$\{a_k\}_{lp,q}=\left\{\sum a_k^{*}k^{q/p-1}\right\}^{1/q}<\infty,\ 1\le p,\ q<\infty.$$

Теорема 1

Пусть $1\le p$, q<∞, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$.

Пусть $a_k\downarrow 0$. Для того чтобы функция $W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,w_k(x)$ принадлежала пространству $L_{p.q}[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы $\{a_k\}\in l(p,q)$.

Теорема 2

Пусть $a_k\downarrow 0$, $1\le p$, q<∞

$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,w_k(x)$, Тогда для того чтобы $\{a_k\}\in l(p,q)$ необходимо и достаточно чтобы

$$\int_0^1|w(t)|^q t^{q/p'}\frac{dt}{t}<\infty$$

Аналоги теорем 1 и 2 для рядов по тригонометрическим системам ранее были доказаны в [2]. Более общее теоремы для рядов по тригонометрическим системам доказаны в [3].

Список использованных источников

1.Б.И.Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша, 1987, 9стр.
2.Y.Sagher, An application of interpolation theory to Fouries series, Studia Math, 1972,169-181
3.M.Dyachenko, A. Mukanov, S. Tikhonov Hardy-Littlewood theorems for trigonometric series with general monotone coefficients, Studia Mathematica 250(3), 2020, p. 219-232