ӘОЖ 517.5

АНИЗОТРОПТЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНІҢ ПАРАМЕТРЛІК ИНТЕРПОЛЯЦИЯСЫ

Кидирова Азима
azima.kidirova@gmail.com
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің
2-курс докторанты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Н. Копежанова

Бұл жұмыста анизотропты жалпылаған Лоренц кеңістіктерінің параметрлік интерполяциясы туралы теорема дәлелденген.

Айталық f – [0,1] кесіндісінде анықталған өлшемді функция және μ - Лебег өлшемі. f^* функциясы f функциясының өспейтін орын ауыстыруы, ол келесі түрде анықталады [1]:

$$m(\sigma, f) := \mu\{x \in [0,1] : |f(x)| > \sigma\},$$

$$f^*(t) := inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}.$$

1950 ж. Лоренц кеңістігін енгізді [1].

Айталық $1 \le p < \infty,$ и $1 \le q \le \infty.$ L_{pq} Лоренц кеңістігі келесі түрде анықталады:

$$L_{pq} = \left\{ f(t) : \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Егер $q < \infty$

$$\|f\|_{L_{pq}} = \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Егер $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{p\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t),$$

мұндағы $f^*(t)$ – $|f(t)|$ функциясының өспейтін орын ауыстыруы.

L_{pq} Лоренц кеңістігінің шкалалары Лебег кеңістігінің шкаласына қарағанда өте астарлы және ол дифференциалдық теңдеулерде, Фурье қатарларының теориясында, жуықтаулар теориясында, функционалдық кеңістіктер теориясында, сандық әдістер теориясында, математикалық физика теңдеулері теориясында, гармоникалық анализде, интерполяция теориясында көп қолданыс табады.

Айталық $1 \le p < \infty$ болсын. Егер $p = q$ болса, онда L_{pq} Лоренц кеңістігі L_p Лебег кеңістігімен беттеседі.

Лоренц кеңістігінің негізгі қасиеттері олардың параметрлерінің иерархиялық тәуелділігі болып табылады, яғни келесі қасиеттер орындалады:

Негізгі қасиеттер ретінде Лоренц кеңістігіндегі келесі енгізулерді келтірейік [1]:

1^0. Егер $1 \le p < \infty$, $1 \le q < q_1 < \infty$ болса, онда келесі енгізу орындалады

$$L_{pq} \mapsto L_{pq_1} \quad \left(\| f \|_{L_{pq_1}} \le c \| f \|_{L_{pq}} \right).$$

2^0. Кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін келесі енгізу орындалады

$$L_{pq} \mapsto L_{p+\varepsilon q_1}.$$

Бұл қасиеттерден p параметрінің күшті параметр, q параметрінің әлсіз параметр болатынын байқауға болады. p параметрі үшін кеңістік кеңейтілгенде q параметрінің маңызы болмайды.

$0 < p < 1$ параметрі үшін $L_{p,q}(\Omega, \mu)$ квазинормаланған кеңістік болады. $p > 1$ параметрі үшін нормаланған кеңістік болады.

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігін анықтайық. Айталық ω - $[0,+\infty)$ аралығындағы теріс емес функция. $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын $[0,+\infty)$ аралығында анықталған барлық f өлшемді функциялар жиыны [2]-[4]:

егер $0 < q < \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} := \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

егер $q = \infty$, онда

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} := \sup_{0 \le t \le 1} f^*(t)\omega(t).$$

Егер $\omega(t)=t^{\frac{1}{p}}$ болса, онда $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі классикалық L_{pq} кеңістігімен беттеседі.

Айталық $\mu=\{\mu(k)\}_{k\in N}$ – оң сандар тізбегі. $\lambda_q(\mu)$ Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын барлық $a=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ тізбектерінің жиыны
егер $0<q<\infty$, онда

$$\|f\|_{\lambda_q(\mu)}:=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^*\mu(k)\right)^q\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

егер $q=\infty$ болса, онда

$$\|f\|_{\lambda_\infty(\omega)}:=\sup_k a_k^*\mu(k)<\infty,$$

мұндағы $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ - Ф жүйесі бойынша f функциясының $\{\|a_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ Фурье коэффициенті тізбегінің өспейтін орын ауыстыруы.

Айталық $0<\overline{q}=(q_1,q_2)\le\infty$,$t=(t_1,t_2)>0$, $\overline{\varphi(t)}=(\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_2))\ge 0$ болсын. Анизотропты Лоренц кеңістігін келесі түрде анықтаймыз:

$$\Lambda_{\overline{q}}(\overline{\varphi})=\left\{f(t_1,t_2):\quad\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\left(f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\,\varphi_1(t_1)\,\varphi_2(t_2)\right)_1^q\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}<\infty\right\},$$

мұндағы $f^{*_1*_2}=f^{*_1*_2}(t_1,t_2)$ – f функциясының өспейтін орынауыстыруы.

Егер $\overline{q}<\infty$, онда $f^*(t_1,t_2)$ функциясының нормасы келесі түрде анықталады

$$\|f\|_{\Lambda_{\overline{q}}(\overline{\varphi})}=\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty_1}\left(f^*(t_1,t_2)\,\varphi_1(t_1)\,\varphi_2(t_2)\right)_1^q\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Егер $\overline{q}=\infty$, онда $f^*(t_1,t_2)$ функциясының нормасы келесі түрде анықталады

$$\|f\|_{\Lambda_{\overline{\infty}}(\overline{\varphi})}=\sup_{t_1}\sup_{t_2}f^*(t_1,t_2)\,\varphi_1(t_1)\,\varphi_2(t_2).$$

Теорема 1. *Айталық* $A_{00}=(A_1^0,A_2^0)$, $A_{01}=(A_1^0,A_2^1)$, $A_{10}=(A_1^1,A_2^0)$, $A_{11}=(A_1^1,A_2^1)$ – *кеңістіктердің үйлесімді жұбы және* $\varphi_1(t_1)\in C$, $\varphi_2(t_2)\in C$. *Онда*

$$\overline{A}_{\varphi_1^0(t_1),\varphi_2^0(t_2),q_1^0,q_2^0}\cap\overline{A}_{\varphi_1^1(t_1),\varphi_2^1(t_2),q_1^1,q_2^1}\subset\overline{A}_{\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_2),q_1,q_2},$$

мұндағы $\varphi_1^0(t_1)<\varphi_1(t_1)<\varphi_1^1(t_1)$ *және* $\varphi_2^0(t_2)<\varphi_2(t_2)<\varphi_2^1(t_2)$.

Классикалық интерполяциялық әдістер мен Лоренц кеңістіктері [1] зерттеледі. Жалпыланған Лоренц кеңістіктері [2] және [3] жұмыстарында тереңірек зерттеліп қарастырылады

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Bergh J., Löfström J., Interpolation spaces. An Introduction. – Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag. – Berlin-New York. – 1976.
2. Persson L.E. An exact description of Lorentz spaces // Acta Sci. Math. – 1983. – Vol. 46. – P. 177–195.

3. Kopezhanova A. N. , Persson L.-E. On summability of the Fourier coefficients in bounded orthonormal systems for functions from some Lorentz type spaces // Eurasian Math. J. – 2010. – Vol. 1, № 2. – P. 76–85.

4. Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 22–25.