ӘОЖ 512.541

ТОПТАР МЕН ГОМОМОРФИЗМДЕРДІҢ ТІЗБЕКТЕРІ

Исаева Айгерим Нурутдинбековна
aika1918@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика және математика факультетінің II курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Б.Қасымқанұлы

Мақалада топтар мен гомоморфизмдер тізбектеріне есептер қарастырылады. Гомоморфизм тізбектері топологиялық кеңістіктерде, гомологиялар теориясында қолданылады. Мұндағы есептер топтар мен гомоморфизмдердің тізбектерінің қасиеттерін анықтау болып табылады.

Егер α және β A тобының C тобына гомоморфизмдері болса, онда олардың қосындысы келесідей теңдікпен анықталады:

$$(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha a + \beta a \qquad (a \in A)$$

және бұл қосындыны А тобынан С тобына гомоморфизмі болып табылады. А тобынан С тобына гомоморфизмдер жиыны осы амалға қарағанда абелдік топ құрайтынын тексеру қиынға соқпайды. А тобынан С тобына гомоморфизмдер тобы деп атаймыз және $Hom(A, C)$ деп белгілейміз. $Hom(A, C)$ тобың нөлі А тобын С тобының бейтарап элементіне бейнелейтін гомоморфизмі болып табылады. Егер $A = C$ болса, онда А тобын С тобына бейнелейтін гомоморфизмдер тобын А тобының эндоморфизмдер тобы деп аталады және $EndA$ арқылы белгілейді.

Егер α: A$\rightarrow$ B және β: B $\rightarrow$ C топтардың гомоморфизмдері болса, онда олардың көбейтіндісін (композиция), келесі теңдікпен анықталған

$$(\alpha\beta)(a) =(\alpha(\beta(a)), \quad (a \in \mathrm{A})$$

А тобынан С тобына гомоморфизм болады.

Сөйлем 1. $\alpha: A \rightarrow B,\ \beta: B \rightarrow C$ – гомоморфизмдер болсын. Онда

(a) $Ker\beta\alpha \supseteq Ker\alpha$ және β- мономорфизм болса, онда $Ker\beta\alpha = Ker\alpha.$
(b) $Im\beta\alpha \subseteq Im\beta$ және α- эпиморфизм болса, онда $Im\beta\alpha = Im\beta.$

Дәлелдеуі. (а) $\alpha: A \rightarrow B,\ \beta: B \rightarrow C$ – гомоморфизмдер болсын. $Im\beta\alpha \subseteq B$ және $\alpha: Ker\alpha \rightarrow 1_B,\quad 1_B \in Im\alpha.$ Ал $\beta: B \rightarrow C$ гомоморфизмі $1_B \rightarrow 1_C$ бейнелейді, ал $\beta\alpha$: $Im\alpha \rightarrow C$ бейнелейді. Сондықтан $\beta\alpha: Ker\alpha \rightarrow 1_C$, ал $\beta: Ker\beta \rightarrow 1_C$, яғни $Ker\alpha \subseteq Ker\beta\alpha.$ Егер β- мономорфизм болса, онда $Ker\beta = \{1_B\}$. Олай болса $Ker\beta\alpha = Ker\alpha.$

(b) $\alpha: A \rightarrow B,\ \beta: B \rightarrow C$ – гомоморфизмдер болсын. Онда

$$Im\alpha \subseteq \mathrm{B}, Im\beta \subseteq \mathrm{C} \qquad (1)$$

болады. $\beta\alpha: Im\alpha \rightarrow C$, ал $\beta: B \rightarrow C$ және (1)-ді ескерсек $\mathrm{Im}\beta\alpha \subseteq \mathrm{I}m\beta$ аламыз. Егер α-эпиморфизм болса, онда $\mathrm{Im}\alpha = \mathrm{B}$ және $\beta: B \rightarrow C$, сондықтан $Im\beta\alpha = \mathrm{I}m\beta$ теңдігі орындалады.

Сөйлем 2. $\alpha: A \rightarrow B,\ \beta: B \rightarrow C$ – гомоморфизмдер болсын. Онда

(а) Егер $\beta\alpha -$ мономорфизм болса, онда α – мономорфизм, бірақ β– мономорфизм болмауы мүмкін.
(b) Егер $\beta\alpha$- эпиморфизм болса, онда β – эпиморфизм, бірақ α – эпиморфизм болмауы мүмкін.

Дәлелдеуі. (а) $f: A \rightarrow B$ бейнелеуін мономорфизм деп атаймыз, егер кез келген $a, b \in A$ үшін $f(a) = f(b)$ болғанда, онда $a = b$ болады.

$\alpha: A \rightarrow B,\ \beta: B \rightarrow C$ – гомоморфизмдер және βα-мономорфизм болсын. Анықтама бойынша, $A -$ның кез келген $a, b \in A$ үшін $(\beta\alpha)(a) = (\beta\alpha)(b)$ болғанда $a = b$ болуы керек.

Сонымен $(\beta\alpha)(a) = (\beta\alpha)(b)$ болғанда $a = b$ болады. Композицияның анықтамасы бойынша $(\beta\alpha)(a) = \beta\big(\alpha(a)\big)$ және $(\beta\alpha)(b) = \beta\big(\alpha(b)\big)$. Ал $a = b$ тең болғанда $\alpha(a) = \alpha(b)$ болады. Яғни α – мономорфизм.
Егер $|Im\alpha| \geq |C|$ болса, онда β мономорфизм бола алмайды.

(б) $\alpha: A \rightarrow B,\ \beta: B \rightarrow C$ – гомоморфизмдер және $\beta\alpha$- эпиморфизм болсын, яғни $\mathrm{Im}\beta\alpha = \mathrm{C}$, С жиынының кез келген c үшін үшін А-дан a элемент табылады $(\beta\alpha)(a) = c$. Сонымен,

$$(\beta\alpha)(a) = \beta\big(\alpha(a)\big) = c$$

немесе

$$\beta\alpha(A) = C \text{ және } \beta(Im\alpha) = C.$$

Осыдан β – эпиморфизм екені байқалады.
Егер α – эпиморфизм болмаса, онда ${}^{A}\!/_{Ker\alpha} \simeq Im\alpha$, және $\beta(Im\alpha) = C$, яғни β бәрібір эпиморфизм болады.
Егер α – эпиморфизм болса, онда $Im\alpha = B$ және $|A| \geq |B| \geq |C|$ болады.
Сонымен, α – эпиморфизм болуы да болмауы да мүмкін.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Л. Фукс Издательство «Мир» // Found Comput Math. 2012 №12. P.139–172 Москва 1974 г, 135 с.
2. А. Мынбаева «Топтар теориясы», 2016 ж.
3. П. С.Александров «Введение в теорию групп», Москва 2008г, 78 с.
4. А. Г. Курош «Курс высшей алгебры» в // Мат. заметки, Т. 73, №6, 2003, С. 803-812, Москва 1971г