ОӘЖ 517.954

ШТУРМ – ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫНЫҢ СПЕКТРІ ТУРАЛЫ

Закариева Зарует Алмазовна
zaruet.zakarieva@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ докторанты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – Қ.Н. Оспанов

Бұл жұмыс корректілі тарылудың симметриялы минималды оператор жағдайындағы кейбір өзіне - өзі түйіндес операторлардың ұқсастығына арналған. Нәтижесінде алынған теорема Штурм - Лиувилль операторына қолданылды, өзіне - өзі түйіндес емес сингулярлы ұйытқыған оператордың спектрі нақты және оған сәйкес келетін меншікті векторларының жүйесі Рисс базисін құрайтыны көрсетілді.

Кейбір негізгі анықтамаларды келтіре кетейік.

Анықтама 1. H Гильберт кеңістігі болып, анықталу облысы $D(L)$ және мәндер жиыны $R(L)$ болып табылатын $L: H \to H$ L сызықты операторы берілсін. L операторының ядросы деп келесі жиынды айтамыз:

$$KerL = \{f \in D(L) : Lf = 0\}.$$

Анықтама 2. L операторы L_1 операторының тарылуы, ал L_1 операторы L операторының кеңеюі деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

- $D(L) \subset D(L_1)$,
- $Lf = L_1 f$, барлық $D(L)-$дан алынған $f-$тер үшін.

Бұл жағдайда $L \subset L_1$ деп жазады.

Анықтама 3. H Гильберт кеңістігінде анықталған L_0 тұйық сызықты операторы минималды деп аталады, егер $\overline{R(L_0)} \neq H$ орындалып, $R(L_0)-$де анықталған L_0^{-1} шенелген кері операторы бар болса.

Анықтама 4. Егер $R(\hat{L}) = H$ және $Ker\hat{L} \neq \{0\}$ орындалса, онда H Гильберт кеңістігінде анықталған $\hat{L}$ тұйық сызықты операторы максималды деп аталады.

Анықтама 5. Егер барлық H кеңістігінде анықталған L^{-1} шенелген кері операторы бар болса, онда H Гильберт кеңістігінде анықталған L сызықты тұйық операторы корректілі деп аталады.

Анықтама 6. Егер $L_0 \subset L \quad (L \subset \hat{L})$ кірістіруі орындалса, онда H Гильберт кеңістігінде анықталған L корректілі операторы L_0 минималды операторының корректілі кеңеюі ($\hat{L}$ максималды операторының корректілі тарылуы) деп аталады.

H Гильберт кеңістігінде L сызықты операторын қарастырайық.

$$Lu = f \tag{1}$$

түріндегі теңдеу $R(L)-$де корректілі шешілімді деп аталады, егер барлық $u \in D(L)$ үшін $\|u\| \le C\|Lu\|$ (мұндағы $C > 0$ және $u-$дан тәуелсіз) теңсіздігі орындалса. Егер $R(L) = H$ теңдігі орындалса барлық жерде шешілімді деп аталады. Егер (1) теңдігі бір уақытта корректілі және барлық жерде шешілімді болса, онда L операторы корректілі оператор деп аталады.

Егер $\hat{L}$ максималды операторының L корректілі тарылуы белгілі болатын болса, онда $\hat{L}$ операторының барлық корректілі тарылуларының кері операторларының түрі төмендегідей[1]:

$$L_k^{-1} f = L^{-1} f + Kf, \tag{2}$$

мұндағы K операторы $H-$ты $Ker\hat{L}-$ға бейнелейтін кез-келген сызықты шенелген оператор.

L_0-минималды оператор және M_0- басқа бір минималды оператор болсын және барлық $u \in D(L_0), \quad v \in D(M_0)$ үшін $(L_0 u, v) = (u, M_0 v)$ теңдігімен байланыстырлысын. Ондай болса $\hat{L} = M_0^*$ және $\hat{M} = L_0^*$ максималды операторлар болады және $L_0 \subset \hat{L}, \ M_0 \subset \hat{M}$ кірістірулері орындалады.

$\hat{L}$ максималды операторының L корректілі тарылуы бір уақытта L_0 минималды операторының корректілі кеңеюі болатын болса, онда ол шенелген корректілі кеңеюі деп аталады. Ең болмағанда бір L шенелген корректілі кеңеюінің бар екенін М.И. Вишик дәлелденді[2].

$\hat{L}$ максималды операторының барлық мүмкін болатын L_K корректілі тарылуларының кері операторлары (2) түрінде, сондықтан $D(L_K)$ $H-$та тығыз орналасады сонда тек сонда ғана, егер $Ker(I + K*L*) = \{0\}$ орындалса. M_0 операторының барлық мүмкін болатын M_K корректілі кеңеюлерінің кері операторларының түрі келесідей:

$$M_K^{-1} f = (L_K^*)^{-1} f = (L^*)^{-1} + K^* f,$$

мұндағы $K-\quad H-$та анықталған кез-келген шенелген сызықты оператор және $R(K) \subseteq Ker\hat{L}$, сол сияқты:

$$Ker(I + K^* L^*) = \{0\}.$$

Теорема 1. L_0 операторы H Гильберт кеңісітігінде берілген симметриялы минималды оператор, $L-$ осы L_0 операторының өзіне -өзі түйіндес корректілі кеңеюі, ал L_K- операторы $\hat{L}$ максималды операторының корректілі тарылуы болсын $(\hat{L} = L_0^*)$. Егер

$$R(K^*) \subset D(L), \quad I + KL \ge 0$$

орындалып, $I+KL-$қайтарымды болса (мұндағы L және K операторлары (2) формуласында көрсетілген операторлар), онда L_K операторы өзіне -өзі түйіндес операторға ұқсас оператор[2].

(2) формуласын келесі түрде жаза аламыз

$$L_K^{-1} = L^{-1} + K = (I+KL)L^{-1} \tag{3}$$

Сондықтан L_K операторы $\hat{L}$ максималды операторының тарылуы болады да, оның анықталу облысына төмендегі түрде жазылады:

$$D(L_K) = \{u \in D(\hat{L}) : (I - K\hat{L})u \in D(L)\}.$$

Келесі тұжырым орынды.

Теорема 2. T операторы үшін келесі шарттар эквивалент:

a) $T-$ өзіне-өзі түйіндес операторға ұқсас оператор.

b) $T = PA$ мұндағы $P-$ оң және қайтымды оператор, ал $A-$ өзіне-өзі түйіндес оператор.

c) $S^{-1}TS = T^*$ және $0 \in \overline{W(S)}$.

Теорема 1-дің дәлелдеуі [3].

$\overline{D(L)} = H$ орындалатындығынан $\overline{KL}-$дың H Гильберт кеңістігінде шенелгендігі шығады. Ары қарай $\overline{KL}-$дың орнына KL жазамыз. Ондай болса теорема 2 бойынша теорема 1-дің шарттарына сәйкес келесіні аламыз, $I+KL \geq 0$ және $I+KL-$ қайтымды болады. Бұл теорема 1-дің дәлелдеуіне алып келеді.

Мысал 1. (0,1) интервалында Штурм-Лиувилль теңдеуін қарастырайық

$$\hat{L}y = -y'' + q(x)y = f \tag{4}$$

мұндағы $q(x)-$ $L^2(0,1)-$ден алынған нақты функция. L_0 арқылы $L_2(0,1)$ кеңістігіндегі (4) дифференциалдық өрнегі туындатқан минималды операторды және $\hat{L}$ арқылы максималды операторды бейнелейік[4].

$$D(L_0) = W_2^2(0,1)$$

және

$$D(\hat{L}) = \left\{ y \in L^2(0,1) : y, y' \in AC[0,1], y'' - q(x)y \in L^2(0,1) \right\}$$

болатындығы түсінікті. Ондай болса $Ker\hat{L} = \{a_{11}c(x) + a_{12}s(x)\}$, мұндағы $a_{11}, a_{12}-$ кез-келген тұрақты сонымен қоса $c(x)$ және $s(x)$ функциялары төмендегідей анықталады:

$$c(x) = 1 + \int_0^x K(x,t;0)dt, \quad s(x) = x + \int_0^x K(x,t;\infty)tdt,$$

мұндағы $K(x,t;0) = K(x,t) + K(x,-t), \quad K(x,t;\infty) = K(x,t) - K(x,-t),$ ал өз кезегінде $K(x,t)$ анықталу облысы

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, -x < t < x\}$$

болып табылатын келесі Гурса есебінің шешімі болып табылады:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} = q(x)K(x,t), \\ \end{cases}$$

(0,1) интервалында (4) теңдеуі үшін Дирихле есебіне сәйкес келетін операторды L тұрақты шенелген кеңеюі ретінде қарастырамыз. Әрбір $f \in L_2(0,1)$ (2) формуласындағы K операторы бір мәнді анықталады. K операторы $L_2(0,1)-$ ді $Ker\hat{L}-$ ға бейнелейтін $L_2(0,1)-$ де анықталған шенелген оператор. L_K операторы $\hat{L}$ операторының тарылуы болып табылады[5].

Егер $I + KL \geq 0$ және $I + KL -$ қайтымды болса, онда L_K операторының спектрі $L^2(0,1)-$ де Рисс базисін құрайтын $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ меншікті функцияларына сәйкес келетін $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ оң меншікті мәндерден тұрады, себебі $L^{-1} -$ оң өзіне-өзі түйіндес компактілі оператор.

Осылайша, біз өзіне-өзі түйіндес сингулярлы ауытқыған спектрі $L^2(0,1)-$ де базис құрайтын меншікті векторлар жүйесімен және Дирихле есебінің спектрімен дәлме -дәл беттесетін Штурм-Лиувилль операторының мысалын құрдық.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О расширениях и сужениях операторов в банаховом пространстве // Успехи матем. Наук. -1982, вып. 4. – С. 116-123.

2. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Московского матем. общества. - 1952. - Т.1. – С. 187-246.

3. Бияров Б.Н. Спектральные свойства корректных сужений и расширений оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, №12. – С. 2027-2032.

4. Biyarov B.N., Svistunov D.A., Abdrasheva G.K. Correct singular perturbations of the Laplace operator // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol.11, No. 4. - P. 25-34.

5. Biyarov B.N., Zakariyeva Z.A., Abdrasheva G.K. Non self-adjoint well-defined restrictions and extensions with real spectrum // Уфимский математический журнал. -2022. – Т.14, №1. – С. 95-102.