ӘОЖ: 512.572

ШЕШІЛІМДІ ЖӘНЕ НИЛЬПОТЕНТТІ НОВИКОВ АЛГЕБРАЛАРЫ

Жасталапова Жанаргүл Жасталапқызы
zhanargul.zhastalapova@bk.ru
Механика-математика факультетінің 2 курс магистранты
«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті» КеАҚ,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Абуталипова Шынар Узбековна

Аннотация : Бұл мақалада Новиков алгебрасы болатын алгебраға мысал келтіріледі. Содан кейін оның шешілімді де, нильпотентті де болмайтыны көрсетіледі.

Кілт сөздер: Новиков алгебрасы, шешілімді алгебра, нильпотентті алгебра, симметриялық, коммутативтілік, ақырлы өлшемді алгебра.

Summary: In this paper is introduced one example of Novikov algebra. There is also proved that one is not solvable or nilpotent.

Keywords: Novikov algebras, solvable algebra, nilpotent algebra, symmetry, commutativity, finite-dimensional algebra.

R ассоциативті-коммутативті бірлік элементі бар сақина болсын. $\mathcal{N}$ ассоциативті емес алгебрасы Новиков алгебрасы деп аталады [1,2], егер $\mathcal{N}$ алгебрасында келесі тепе-теңдіктер орындалса:

$$x(yz) = y(xz),$$

$$(x, y, z) = (x, z, y).$$

Қосымша Новиков алгебрасында келесі тепе-теңдіктер орындалады [1, А.А.Балинский,С.П.Новиков]:

$$(x, y, z) - (y, z, x) = [x, y]z,$$

$$(x, y, z) - (z, x, y) = [y, z]x + [x, y]z,$$

$$2(y, z, x) = [yz, x] + [yx, z],$$

$$2(y, z, x) - (z, x, y) - (x, y, z) = [y, z]x - [x, y]z,$$

$$[yz, x] + [yx, z] - (z, x, y) - (x, y, z) = [y, z]x - [x, y]z =$$

$$= [yz, x] + [yx, z] - (z, x, y) - (x, y, z) = [y, z]x + [y, x]z,$$

$$\big(x, y, (z, t, u)\big) - \big(y, x, (z, t, u)\big) =$$

$$= \big(z, t, (x, y, u)\big) - \big(z, t, (y, x, u)\big),$$

$$\big(x, y, (z, t, u)\big) = \big(x, u, (z, t, y)\big).$$

Бұл жерде $[x, y] = xy - yx$ x және y элементтерінің коммутаторы; $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ x, y және z элементтерінің ассоциаторы болып табылады.

Егер $\mathcal{N}$алгебрасы келесі тепе-теңдіктерді қанағаттандырса, онда $\mathcal{N}$ алгебрасы (сол жақ) *Новиков алгебрасы* деп аталады:

$$x(yz) - (xy)z = y(xz) - (yz)x \quad \text{(сол жақ симметриялылық)}$$

$$(xy)z = (xz)y \quad \text{(оң жақ коммутативтілік)}$$

кез келген $x, y, z \in \mathcal{N}$. Сондай-ақ, Новиков алгебрасының "оң жақ нұсқасы" бар, яғни оң симметриялылық пен сол жақ коммутативтілікті қанағаттандыратын алгебра. Біз осы жұмысымызда тек сол жақ Новиков алгебраларын қарастырамыз және қайталамас үшін $\mathcal{N}$ Новиков алгебрасы әрқашан сол жақ Новиков алгебрасы болып саналады.

Егер сол A алгебрасы үшін

$$\mathrm{A}^{\alpha} = 0$$

болатындай α көрсеткіші табылса, онда A алгебрасын *нильпотентті* деп айтамыз. Яғни, нильпотентті алгебраның кез келген α элементінің көбейтіндісі нөлге тең болады, сол себепті нильпотенті алгебраның осы қасиетін оның анықтамасы ретінде қолдана аламыз.

Теорема 1. $\mathcal{N}$ сол жақ Новиков алгебрасы болсын. Онда келесі мәндер эквивалентті болады [2, И.Шестаков, Ч. Цзуй]:

(i) $\mathcal{N}$ – оң жақ нильпотентті
(ii) $\mathcal{N}^2$ нильпотентті
(iii) $\mathcal{N}$ шешілімді

Егер A – сол жақ нильпотентті ақырлы өлшемді оң жақ Новиков алгебрасы болса, онда A^2 нильпотентті болатынын Е.И. Зельманов дәлелдеді [3]. В.Т. Филиппов сипаттамасы нөлге тең өріс үстіндегі шектеулі индексті оң жақ нөлдік алгебраның оң жақ нильпотентті екенін дәлелдеді; шындығында, ол егер оң симметриялы және нильпотентті болса, бұл оң жақ Новиков алгебрасы болады [4]. Егер сипаттамасы оң p болатын өріс үстіндегі A оң жақ Новиков алгебрасы $p > n$ немесе $p = 0$ және n ақырлы индексінің сол жағында нөлге тең болса, онда A^2 нильпотентті болатындығын Джумадильдаев А.С. мен Туленбаев Қ.М. дәлелдеді [5]. Бокуть Л.А, З. Чен және Ю. К. Чжан [6] нәтижені [5] Новиковтың супералгебрасын белгілі бір жағдайларға дейін кеңейтті.

Мысал 1. Стандартты базисі $1, x, x^2, \ldots, x^n$ болатын ақырлы өлшемді көпмүшелердің $\mathbb{F}_n[x]$ алгебрасын $\circ$ амалына қатысты Новиков алгебрасы болатындығын көруге болады. Мұнда, $\circ$ амалы келесі түрде анықталады:

$$f(x) \circ g(x) = f'(x) \cdot g(x)$$

Алайда, $\big((f_1(x) \circ f_1(x)) \circ \ldots\big) \circ f_n(x)$ көбейтіндісі ешқандай n үшін нөлге айналмайтындығын көруге болады. Айталық, $n = 4$ болғанда

$$\begin{aligned}
\Big(\big(f_1(x) \circ f_2(x)\big) \circ f_3(x)\Big) \circ f_4(x) &= \Big(\big(f_1'(x) \cdot f_2(x)\big) \circ f_3(x)\Big) \circ f_4(x) \\
&= \Big(\big(f_1'(x) \cdot f_2(x)\big)' \cdot f_3(x)\Big) \circ f_4(x) = \Big(\big(f_1'(x) \cdot f_2(x)\big)' \cdot f_3(x)\Big)' \cdot f_4(x) \\
&= \Big(\big(f_1''(x) f_2(x) + f_1'(x) f_2'(x)\big) \cdot f_3(x)\Big)' \cdot f_4(x) \\
&= \big(f_1''(x) f_2(x) f_3(x) + f_1'(x) f_2'(x) f_3(x)\big)' \cdot f_4(x) \\
&= \big(f_1'''(x) f_2(x) f_3(x) + f_1''(x) f_2'(x) f_3(x) + f_1''(x) f_2(x) f_3'(x) + f_1''(x) f_2'(x) f_3(x) \\
&\quad + f_1'(x) f_2''(x) f_3(x) + f_1'(x) f_2'(x) f_3'(x)\big) \cdot f_4(x)
\end{aligned}$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Балинский А.А., Новиков С. П. Гидродинамикалық типтегі Пуассон жақшалары, Фробениус алгебралары және Ли алгебралары // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, №5. С. 1036-1039.
2. Иван Шестаков, Чжан Цзуй. Шешілімді және нильпотент Новиков алгебрасы(ағылшын тілінде).
3. Е.И. Зельманов, Лидің жергілікті аударма-инвариантты алгебраларының бір класы туралы, Кеңістік математика.Докл.. 35(1) (1987) 216-218.

4. В.Т. Филиппов, Новиковтың шектеулі индексінің оң симметриялық және нөлдік алгебралары туралы, (орыс) Мат. Ескертпелер 70(2) (2001) 289-295; математика бойынша аударма. Ескерту 70(2) (2001)258-263.
5. А.С. Жұмаділдаев пен К. М. Төленбаев, Новиков алгебраларына арналған Энгель теоремасы, Алгебрадағы байланыс 34(3) (2006) 883-888.
6. З. Чжан, Ю. К. Чен және Л. А. Бокут, Гельфанд-Дорфман-Новиковтың еркін супералгебралары және Пуанкаре-Бирккоф-Витт типіндегі теорема, Алгебра мен есептеудің халықаралық журналы 29 (3) (2019) 481-505.