ӘОЖ 517

ЕРКІН ПУАССОН АЛГЕБРАСЫНЫҢ АВТОМАРФИЗМІ

Аққұл Құрманғазы Дәулетұлы
kurmanghazy@list.ru
Нұр-Сұлтан қаласы, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ-і
Ғылыми жетекші: Козыбаев Данияр Хаибилдаевич

Қазіргі математикадағы қазіргі тенденциялардың бірі математика мен теориялық механиканың әртүрлі есептеріне Пуассон құрылымдарын қолдану болып табылады. Бұл мәселелер қатты дене динамикасында, аспан механикасында, құйынды теориясында және космологиялық модельдерде туындайды. Пуассон алгебралары Гамильтон механикасында, симплектикалық геометрияда шешуші рөл атқарады, сонымен қатар кванттық топтарды зерттеуде орталық болып табылады. Пуассон құрылымдарының теориясының дамуының өзі көп өлшемді шыңдардың динамикасымен ынталандырылғанын атап өтеміз, өйткені соңғысы көптеген теоремалардың абстрактілі тұжырымдарын көрнекі және мағыналы етуге мүмкіндік береді. Ли-Пуассон жақшаларының кейбір маңызды мысалдары Якобиге бұрыннан белгілі болғанын да ескеріңіз. Оның мысалдарында Пуассон жақшалары Гамильтон теңдеулерінің бірінші интегралдар кеңістігінде пайда болды.

k өрісіндегі B векторлық кеңістігі, екі бинарлық операциямен жабдықталған $x \cdot y$ (көбейту) және $\{x, y\}$ (Пуассон жақшасы), егер B x•y -ға қатысты ассоциативті-коммутативті алгебра болса, $\{x, y\}$ және B -ға қатысты Ли алгебрасы келесі сәйкестікті (Лейбниц сәйкестігін) қанағаттандырады:

$$\{x \cdot y, z\} = \{x \cdot z\}y + x\{x \cdot z\}.$$

Соңғы уақытқа дейін Пуассон құрылымдарының алгебралық теориясы аз зерттелген. Қазіргі уақытта Пуассон алгебраларын Франция, Ресей, Бразилия, Аргентина, АҚШ, Болгария және т.б. көптеген математиктер зерттеп жатыр. Филдс медалінің иегері М.Концевичтің көрнекті нәтижесі [1] Пуассонның канондық құрылымдарының барлығы канондық кванттауды мойындайтынын айтады. Еркін Пуассон алгебраларының алгебралық кванттауларын И.П. Шестаков [2] Иордан алгебрасының кейбір кластарының мамандығын дәлелдеу. Еркін ассоциативті алгебралар бойынша негізгі нәтижелердің бірі Бергманның центризаторлар туралы теоремасы [3], онда еркін ассоциативті алгебраның тұрақты емес элементінің центризаторы бір айнымалыдағы көпмүшелік алгебра екені дәлелденді. Бұл теореманың 0 сипаттамалық өрістегі еркін Пуассон алгебралары үшін аналогын Л.Макар-Лиманов, У.У. Өмірбаева [4].
1942 жылы Х.V.Е. Юнг (H.W.E. Jung) [5] екі айнымалы көпмүшелік алгебралардың 0 сипаттамалық өрістегі автоморфизмдері икемді екенін дәлелдеді. 1953 жылы В.ван дер Кулк [6] бұл нәтижені ерікті сипаттама жағдайына жалпылады. Л. Макар-Лиманов [7] мен А.Ж. Чернякевич [8] екі айнымалыдағы еркін ассоциативті алгебраның автоморфизмдері де икемді екенін дәлелдеді.

И.П. еңбектерінде. Шестакова және У.У. Өмірбаев [9], Нагата автоморфизмі [10] екені дәлелденді.

$$\sigma = (x + (x^2 - yz)z, y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2 z, z)$$

0 сипаттамалық өрістегі $k[x, y, z]$ көпмүшелік алгебрасы жат емес, яғни жабайы. В.У. Өмірбаев [11] де аник автоморфизмінің [12] екенін дәлелдеген.

$$\delta = (x + z(xy - zy), y + (xy - zy)z, z)$$

0 сипаттамасының өрісіндегі еркін ассоциативті $k\langle x, y, z\rangle$ алгебрасы жабайы.
Нагата мен Аниканың автоморфизмдері бір жаңа айнымалы қосылғаннан кейін ұстамды болатынына назар аударыңыз, яғни олар тұрақты ұстамды.
Еркін Ли алгебраларында жағдай көпмүшелік алгебралар мен бос ассоциативті алгебралар жағдайынан түбегейлі ерекшеленеді. 1964 жылы П.Кон [13] ақырлы генерацияланған бос Ли алгебраларының автоморфизмдері икемді екенін дәлелдеді.
Аффиндік алгебралық геометрияның негізгі мәселелерінің бірі $n > 3$ айнымалылардағы көпмүшелік алгебралардың автоморфизм топтарын сипаттау болып табылады. Өкінішке орай, бұл мәселе $n = 3$ үшін де ашық күйінде қалады және генераторлар туралы негізді болжамдар жоқ. Мұндай болжамды жасау үшін алгебралардың көптеген әртүрлі класстарының автоморфизмдерін қарастыру қажет. Көпмүшелік алгебралардағы Пуассон құрылымдарының автоморфизмдерін зерттеу М.Концевичтің симплектикалық алгебралар мен Вейл алгебраларының автоморфизм топтары арасында изоморфизмнің бар екендігі туралы жорамалын ескере отырып та қызықты [14].
$x_1, x_2, \dots, x_n$. n айнымалыларындағы k өрісі бойынша $\Lambda = P\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ еркін Пуассон алгебрасы болсын.
Еркін Пуассон алгебрасының Λ автоморфизмі φ, егер мұндай i бар болса, элементар деп аталады.

$$\varphi(x_i) = \alpha x_i + g,$$

$0 \neq \alpha \in k$, $g \in P\langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\rangle$ и $\varphi(x) = x_i$ барлық $j \neq i$.

Λ алгебраның ψ автоморфизмі, егер ол элементар автоморфизмдердің туындысы болса, икемді деп аталады. Λ алгебраның ұстанбаған автоморфизмдері жабайы деп аталады. Λ алгебраның автоморфизмдер тобын $Aut(\Lambda)$ арқылы белгілейміз.
$\varphi = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ белгісі $\varphi(x) = f, 1 \leq i \leq n.$ болатындай Λ алгебраның φ автоморфизмін білдіреді.
$f_1, f_2, \dots, f_n$ элементтер жүйесінің элементар түрлендіруі әрбір элементке тек бір f_i элементін ауыстырады.

$$\alpha f + g,$$

мұндағы 0≠ $\alpha \in k, g \in P\langle f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\rangle$. Жазу

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) \to (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

$g_1, g_2, \dots, g_n$ элементтер жүйесі $f_1, f_2, \dots, f_n$ бір элементар түрлендіру арқылы алынғанын білдіреді.
φ=(f_1,f_2,…,f_n) автоморфизмі форманың элементар түрлендірулерінің тізбегі болған жағдайда ғана икемді екенін көрсету оңай.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}\right) = \left(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}\right) \to \dots \to \left(f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}\right)$$
$$= (f_1, f_2, \dots, f_n) = \varphi.$$

Екі x, y айнымалысында $\mathrm{A} = \mathrm{P}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ бос Пуассон алгебрасы болсын. A бойынша стандартты дәреже функциясын градуспен белгілеңіз, яғни, $\deg x = \deg y = 1. P = \frac{A}{Ann(A)}$ болсын.
Бос Пуассон алгебрасы А автоморфизмі φ үшбұрышты деп аталады, егер

$$\varphi = (\alpha x + g, \beta y),$$

мұндағы $0 \neq \alpha,\ \beta \in k,\ g \in PB\langle y\rangle$. Еркін Пуассон алгебрасы A -ның үшбұрышты автоморфизмдер тобын $T(A)$ арқылы және A алгебраның сызықтық автоморфизмдерінің $GL_2(k)$-тобымен белгілейміз.
$y \in A$ элементінің y^n дәрежелерін $y^1 = y, y^n = [y^{n-1}, y], n \geq 2$ орнату арқылы анықтаймыз.
Лемма 1 1) Элементтік жүйе

$$A_0 = \{id = (x, y), \gamma = \mid (x, y + ay)\ a \in k\}$$

$C = GL_2(k) \cap T(A)$ топшасына қатысты $GL_2(k)$ сол жақ кластардың өкілдерінің жүйесі болып табылады.
2) Элементтік жүйе

$$B_0 = \{\delta = (x + h(y), y) \mid h(y) = \beta_n y^n + \dots + \beta_2 y^2\}$$

$C = GL_2(k) \cap T(A)$ топшасына қатысты $T(A)$ сол жақ кластардың өкілдерінің жүйесі болып табылады.
Дәлелдеу. 1) $l \in GL_2(k)$ болсын. Егер l пішімі $(ax + by, cx + dy)$ болса, мұндағы с≠0, онда $c \neq 0$,

$$l = \left(y, x + \frac{d}{c}y\right) \circ \left(\left(b - \frac{ad}{c}\right)x + ay, cy\right).$$

Егер $c = 0$ болса, онда $l \in T(l)$, т.е. $l = id^\circ l$. Яғни $\gamma_1 = (y, x + a_1 y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2 y)$, и $\gamma_1\ C = \gamma_2 C$ онда

$$\gamma_1^{-1\circ}\gamma_2 = (y - a_1 x, x)^\circ(y, x - a_2 y) = (x, (a_1 - a_2)x + y) \in C.$$

Мұнда $a_1 = a_2$ шығады. Демек $\gamma_1 = \gamma_2$.

2)Мұндағы $h_1(y) = \beta_n y^n + \dots + \beta_2 y^2 + \beta_1 y, \psi = (\alpha x + h_1(y),\ \beta y) \in T(A)$ болсын . Сонда ψ ретінде көрсетіледі.

$$\delta^\circ\lambda,$$

мұндағы $\delta = \left(x + \frac{h(y)}{\alpha}, y\right), \lambda = (\alpha x + \beta_1 y, \beta y)$

$\delta_1 = (x + h_1(y), y), \delta_2 = (x + h_2(y), y)$ және $\gamma_1 C = \gamma_2 C$ деп есептейік.
Сонда

$$\delta_1^{-1\circ}\delta_2 = (x - h_1(y), y)^\circ(x - h_2(y), y) = (x - h_1(y) + h_2(y), y) \in C,$$

осыдан $h_1(y) = h_2(y)$ болатыны шығады. Демек, $\delta_1 = \delta_2$. □

Лемма 2 $A_0 B_0$ Лемма 1-де анықталған жиындар болсын. Сонда A алгебраның кез келген φ икемді автоморфизмі түрдегі туындыға ыдырайды.

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \delta_k \circ \lambda, \quad (1)$$

мұндағы $\gamma_i \in A_0,\ \gamma_2, \dots, \gamma_k \neq id,\ \ \delta_1, \dots, \delta_{k-1} \neq id,\ \ \lambda \in GL_2(k) \cap T(A)$
Дәлелдеу. Бізде бар

$$(\alpha x + h_1(y), y) = \left(x + \frac{\beta_n}{\alpha} y^n + \dots + \frac{\beta_2}{\alpha} y^2, y\right) \circ (\alpha x + \beta_1 y, y),$$

$$\big(x, \beta y + h_2(x)\big) = (y, x) \circ \left(x + \frac{\beta_n}{\alpha} y^n + \dots + \frac{\beta_2}{\alpha} y, y\right) \circ (y, \beta x + \beta_1 y),$$

Кез келген элементар афтоморфизімнің формасы болады

$$l_1 \circ \delta \circ l_2,$$

Мұндағы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$- элементар автоморфизмдер. Сондықтан бізде бар

$$\varphi = l_1 \circ \delta_1 \circ l_2 \circ \delta_2 \circ \dots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1},$$
$$\delta_i \in B_0, l_i \in GP_2(k). \quad (2)$$

φ $k \leq n$ арқылы көбейтінді (1) түрінде берілген n бойынша индукция арқылы дәлелдейік.

Лемма 1 бойынша l_1автоморфизімін $\gamma_1 \circ \lambda_1$ түрінде жазуға болады, мұндағы $\gamma_i \in A_0$, $\lambda \in GL_2(k) \cap T(A)$. Сонда

$$l_1 \circ \delta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \delta_1 = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \lambda_1,$$

мұнда $\delta_1' = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \lambda_1^{-1} \in B_0$. Бізде

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ (\lambda_1 \circ l_2) \circ \delta_2 \circ \dots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1},$$

Индуктивті гипотеза бойынша өнім

$$(\lambda_1 \circ l_2) \circ \delta_2 \circ \dots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1}$$

Түрінде жазылады

$$\gamma_2 \circ \delta_2' \circ \gamma_3 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_k \circ \lambda, \qquad k \leq n.$$

Демек,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \gamma_2 \circ \delta_2' \circ \dots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Егер $\gamma_2 \neq id$ болса, нәтиже көрсету (1) пішініне ие болады. $\gamma_2 = id$ жағдайын қарастырайық. $\delta_1' \circ \delta_2' = \delta_2'' \in B_0$ болғандықтан,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \delta_2' \circ \gamma_3 \circ \dots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \delta_2'' \circ \gamma_3 \circ \dots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

$k - 1 < n$ болғандықтан, индуктивті болжам бойынша φ (3.1) бойынша жазылады.

Пайдаланған әдебиеттер:

1. Kontsevich M. Deformation Quantization of Poisson Manifolds// Letters in Mathematical Physics. -2003. -Vol. 66. -P. 157-216.
2. Shestakov I.P. Quantization of Poisson superalgebras and speciality of Jordan Poisson superalgebras// Algebra i logika.-1993. -Vol. 32, N. 5. -P. 571-
3. Bergman G. M. Centralizers in free associative algebras// Trans. Amer. Math. Soc.-1969. -Vol. 137. -P. 327-344.
4. Makar-Limanov L., Umirbaev U. U. Centralizers in free Poisson algebras//Proc. Amer. Math. Soc.-2007.-Vol. 135, N7. -P. 1969-1975.
5. Jung H. W. E. _Uber ganze birationale Trans formation en der Ebene// J. reine angew. Math.-1942. -Vol. 184. -P. 161-174.
6. van der Kulk W. On polynomial rings in two variables// Nieuw Archief voor Wiskunde.- 1953. -Vol. 3, N1. -P. 33-41.
7. Макар-Лиманов Л.Г. Об автомарфизмах свободной алгебры с двумя образующими Функц анализ и его прил.-1970. -Vol. 4, N3. -P. 107-108;
8. Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2//I, II, Trans. Amer. Math. Soc.-1971. -Vol. 160.-P. 393-401; -1972. -Vol. 171.-P.309-315.
9. Shestakov I.P., Umirbaev U.U. Tame and wild automorphisms of ringsof polynomials in three variables// Journal of the American MathematicalSociety-2004. -Vol. 17. -P. 197-227.
10. Nagata M. On the automorphism group of k[x, y]// Lect. in Math., KyotoUniv., Kinokuniya, Tokio, 1972
11. Umirbaev U.U. The Anick automorphism of free associative algebras// J.Reine Angew. Math.-2007. -Vol. 605. -P. 165-178.
13. Cohn P.M. Free rings and their relations. London: 2nd Ed., Academic Press,1985.
14. Belov-Kanel A., Kontsevich M. Automorphisms of the Weyl Algebra// Lettersin Mathematical Physics.-2005. -Vol. 74. -P. 181-199.