ОӘЖ 530.1

# (1+1)-ӨЛШЕМДІ ЕКІ КОМПОНЕНТТІ ФОКАС-ЛЕНЭЛЛС ТЕҢДЕУІ

**Каирбаева Мадина Асылбековна**
madina.kairbaeva@bk.ru
7M05304-«Физика» мамандығының магистранты
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – Е.М. Мырзакулов

Бұл жұмыс (1+1)-өлшемді екі компонетті Фокас-Ленэллс теңдеуін (ФЛТ) зерттеуге арналған. ФЛТ сызықты емес толқындар теориясында, соның ішінде сызықты емес оптикада және плазма физикасында маңызды рөл атқаратын сызықты емес Шредингер теңдеуінің жалпыламаларының бірі болып табылатын жаңа интегралданатын модель. Сондай-ақ, солитонды теңдеулер қатарына жататын оптикалық талшықтарда ультра-қысқа төзімді сызықты емес жарық импульстерінің таралуын сипаттайды [1]-[5]. Осы мақсатпен екі компонетті ФЛТ-нің түрін құрудың алгоритімі зерттелінді. Екі компонентті ФЛТ құру үшін, ФЛТ-нің интегралданатын теңдеулер қатарына жататындығын ескере отырып, оған сәйкес келетін Лакс көрінісін анықтау қажет. Екі компонентті ФЛТ-нің Лакс жұбы [6]

$$\psi_x = U\psi, \tag{1}$$

$$\psi_t = V\psi, \tag{2}$$

мұндағы $U$ және $V$ матрицалық операторлардың түрлерін келесідей деп ұйғарамыз:

$$U = -i\lambda^2 \sum + \lambda Q,$$

$$V = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0 + \frac{A_{-1}}{\lambda} + \frac{A_{-2}}{\lambda^2},$$

мұндағы

$$\sum = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{1x} & q_{2x} \\ r_{1x} & 0 & 0 \\ r_{2x} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

сонымен бірге

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, A_0=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{-1}=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}, A_{-2}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

(1) және (2) теңдеулердің сәйкестік шартына сәйкес $\psi_{xt}=\psi_{tx}$ алатымыз

$$\begin{gathered}\lambda Q_t-\lambda^2 A_{2x}-\lambda A_{1x}-A_{0x}-\frac{A_{-1x}}{\lambda}-\frac{A_{-2x}}{\lambda^2}-i\lambda^4\left[\sum,A_2\right]-i\lambda^3\left[\sum,A_1\right]-i\lambda^2\left[\sum,A_0\right]- \\ -i\lambda\left[\sum,A_{-1}\right]+\lambda^3[Q,A_2]+\lambda^2[Q,A_1]+\lambda[Q,A_0]+[Q,A_{-1}]+\frac{1}{\lambda}[Q,A_{-2}]=0.\end{gathered} \quad (3)$$

Енді (3) теңдеуді $\lambda$-нің дәрежелері бойынша қарастырамыз

$$\lambda^4:\quad -i\left[\sum,A_2\right]=0, \quad (4)$$

$$\lambda^3:\quad -i\left[\sum,A_1\right]+[Q,A_2]=0, \quad (5)$$

$$\lambda^2:\quad -A_{2x}-i\left[\sum,A_0\right]+[Q,A_1]=0, \quad (6)$$

$$\lambda^1:\quad Q_t-A_{1x}-i\left[\sum,A_{-1}\right]+[Q,A_0]=0, \quad (7)$$

$$\lambda^0:\quad -A_{0x}+[Q,A_{-1}]=0, \quad (8)$$

$$\lambda^{-1}:\quad -A_{1x}+[Q,A_{-2}]=0, \quad (9)$$

$$\lambda^{-2}:\quad -A_{2x}=0. \quad (10)$$

(4) теңдеуден анықтайтынымыз

$$a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0.$$

(5) теңдеуден табатынымыз

$$b_{12}=\frac{iq_{1x}a_{1122}-iq_{2x}a_{32}}{2},$$

$$b_{13}=\frac{iq_{2x}a_{1133}-iq_{1x}a_{23}}{2},$$

$$b_{21}=\frac{ir_{1x}a_{1122}-ir_{2x}a_{23}}{2},$$

$$b_{31}=\frac{ir_{2x}a_{1133}-ir_{1x}a_{32}}{2}.$$

(6) теңдеуден алатынымыз

$$c_{12}=\frac{iq_{1x}b_{1122}-iq_{2x}b_{32}}{2},$$
$$c_{13}=\frac{iq_{2x}b_{1133}-iq_{1x}b_{23}}{2},$$
$$c_{21}=\frac{ir_{1x}b_{1122}-ir_{2x}b_{23}}{2},$$
$$c_{31}=\frac{ir_{2x}b_{1133}-ir_{1x}b_{32}}{2},$$
$$a_{11x}=0,$$
$$a_{22x}=\frac{1}{2}\left(r_{1x}q_{2x}a_{32}-r_{2x}q_{1x}a_{23}\right),$$
$$a_{33x}=-\frac{1}{2}\left(r_{1x}q_{2x}a_{32}-r_{2x}q_{1x}a_{23}\right),$$
$$a_{23x}=-\frac{r_{1x}q_{2x}a_{2233}}{2}+\frac{a_{23}}{2}\left(r_{1x}q_{1x}-r_{2x}q_{2x}\right),$$
$$a_{32x}=\frac{q_{1x}r_{2x}a_{2233}}{2}-\frac{a_{32}}{2}\left(r_{1x}q_{1x}-r_{2x}q_{2x}\right).$$

(7) теңдеуден алатынымыз

$$b_{11x}=0,$$
$$b_{22x}=\frac{1}{2}\left(r_{1x}q_{2x}b_{32}-r_{2x}q_{1x}b_{23}\right),$$
$$b_{33x}=-\frac{1}{2}\left(r_{1x}q_{2x}b_{32}-r_{2x}q_{1x}b_{23}\right),$$
$$b_{23x}=-\frac{r_{1x}q_{2x}b_{2233}}{2}+\frac{b_{23}}{2}\left(r_{1x}q_{1x}-r_{2x}q_{2x}\right),$$
$$b_{32x}=\frac{q_{1x}r_{2x}b_{2233}}{2}-\frac{b_{32}}{2}\left(r_{1x}q_{1x}-r_{2x}q_{2x}\right),$$
$$q_{1xt}-b_{12x}-2in_{12}-q_{1x}c_{1122}+q_{2x}c_{32}=0,$$
$$q_{2xt}-b_{13x}-2in_{13}-q_{2x}c_{1133}+q_{1x}c_{23}=0,$$
$$r_{1xt}-b_{21x}+2in_{21}+r_{1x}c_{1122}-r_{2x}c_{23}=0,$$
$$r_{2xt}-b_{31x}+2in_{31}+r_{2x}c_{1133}-r_{1x}c_{32}=0.$$

(8) теңдеуден алатынымыз

$$c_{11x}=-n_{12}r_{1x}-n_{13}r_{2x}+n_{21}q_{1x}+n_{31}q_{2x}+c_{110}, \tag{11}$$
$$c_{22x}=n_{12}r_{1x}-n_{21}q_{1x}+c_{220}, \tag{12}$$

$$c_{33x} = n_{13} r_{2x} - n_{31} q_{2x} + c_{330}, \tag{13}$$

$$c_{23x} = n_{13} r_{1x} - n_{21} q_{2x} + c_{230}, \tag{14}$$

$$c_{32x} = n_{12} r_{2x} - n_{31} q_{1x} + c_{320}. \tag{15}$$

осыдан $c_{110}, c_{220}, c_{330}, c_{230}, c_{320}$ - тұрақтылар.

Жоғарыдағы (11)-(15) теңдеулерден шығатыны

$$n_{11x} = -m_{12} r_{1x} - m_{13} r_{2x} + m_{21} q_{1x} + m_{31} q_{2x}, \tag{16}$$

$$n_{12x} = m_{32} q_{2x} - m_{1122} q_{1x}, \tag{17}$$

$$n_{13x} = m_{23} q_{1x} - m_{1133} q_{2x}, \tag{18}$$

$$n_{21x} = m_{1122} r_{1x} - m_{23} r_{2x}, \tag{19}$$

$$n_{22x} = m_{12} r_{1x} - m_{21} q_{1x}, \tag{20}$$

$$n_{23x} = m_{13} r_{1x} - m_{21} q_{2x}. \tag{21}$$

$$m_{11x} = m_{12x} = m_{13x} = m_{21x} = m_{22x} = m_{23x} = m_{31x} = m_{32x} = m_{33x} = 0, \tag{22}$$

$$n_{31x} = m_{1133} r_{2x} - m_{32} r_{1x}, \tag{23}$$

$$n_{32x} = m_{12} r_{2x} - m_{31} q_{1x}, \tag{24}$$

$$n_{33x} = m_{13} r_{2x} - m_{31} q_{2x}. \tag{25}$$

Онда (16)-(25) және (11)-(15) теңдеулерден табатынымыз

$$n_{11} = n_{22} = n_{23} = n_{33} = n_{32} = 0, \quad n_{12} = \frac{iq_1}{2}, \quad n_{13} = \frac{iq_2}{2}, \quad n_{21} = -\frac{ir_1}{2}, \quad n_{31} = -\frac{ir_2}{2}.$$

$$c_{11} = -\frac{i}{2}\left(q_1 r_1 + q_2 r_2\right) + i, \quad c_{22} = \frac{i}{2}\left(q_1 r_1\right) - i, \quad c_{23} = \frac{i}{2}\left(r_1 q_2\right), \quad c_{32} = \frac{i}{2}\left(q_1 r_2\right), \quad c_{33} = \frac{i}{2}\left(q_2 r_2\right) - i.$$

Сондай-ақ, (9) және (10) теңдеулерден анықтайтынымыз

$$iq_{1xt} - iq_{1xx} + iq_1 - q_1 r_1 q_{1x} + 2q_{1x} - \frac{1}{2} q_2 r_2 q_{1x} - \frac{1}{2} q_1 r_2 q_{2x} = 0, \tag{26}$$

$$iq_{2xt} - iq_{2xx} + iq_2 - q_2 r_2 q_{2x} + 2q_{2x} - \frac{1}{2} q_1 r_1 q_{2x} - \frac{1}{2} q_2 r_1 q_{1x} = 0, \tag{27}$$

$$ir_{1xt} - ir_{1xx} + ir_1 - q_1 r_1 r_{1x} - 2r_{1x} + \frac{1}{2} q_2 r_2 r_{1x} + \frac{1}{2} q_2 r_1 r_{2x} = 0, \tag{28}$$

$$ir_{2xt} - ir_{2xx} + ir_2 + q_2 r_2 r_{2x} - 2r_{2x} + \frac{1}{2} q_1 r_1 r_{2x} + \frac{1}{2} q_1 r_2 r_{1x} = 0. \tag{29}$$

Демек ұйғарылған белгісіз матрицаларымыздың нақты түрлері келесідей болады:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = -i\sum, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & q_{1x} & q_{2x} \\ r_{1x} & 0 & 0 \\ r_{2x} & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}(q_1r_1 + q_2r_2 - 2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}q_1r_1 - i & \frac{i}{2}r_1q_2 \\ 0 & \frac{i}{2}q_1r_2 & \frac{i}{2}q_2r_2 - i \end{pmatrix} = \frac{i}{2}V_0 + i\sum,$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{q_1}{2} & i\frac{q_2}{2} \\ -i\frac{r_1}{2} & 0 & 0 \\ -i\frac{r_2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}V_{-1}, \quad A_{-2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{4} \end{pmatrix} = -\frac{i}{4}\sum.$$

Сонда (26)-(29) теңдеуі үшін Лакс жұбы келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned} U &= -i\lambda^2\sum + \lambda Q, \\ V &= -i\lambda^2\sum + \lambda Q + i\frac{V_0}{2} + i\sum + \frac{i}{2\lambda}V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}\sum. \end{aligned} \tag{30}$$

Демек

$$V_0 = \begin{pmatrix} -(q_1r_1 + q_2r_2) & 0 & 0 \\ 0 & q_1r_1 & r_1q_2 \\ 0 & q_1r_2 & q_2r_2 \end{pmatrix}, V_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Осылайша, екі компонентті ФЛТ алу жолын зерттедік. Жүргізілген зерттеулерге сүйене отырып, қазіргі таңда үлкен қызығушылық тудырып отырған көп өлшемді мульти компонентті ФЛТ құруға болады. Сонымен бірге, олардың нақты түрлі солитонды шешімдерін табуға мүмкіндік бар.

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**


1. Shuwei Xu, Jingsong He, Yi Cheng. The N-order rogue waves of Fokas-Lenells equation, arxiv:1211.5924v, 2012.
2. Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. The construction of the (2+1)-Dimensional integrable Fokas-Lenells equation and its bilinear form by Hirota method. International Conference on Technology, Engineering and Science (IConTES), October 26 - 29, 2018 Antalya, Turkey, 61-67 pp.
3. Jingsong H., Shuwei X., Kuppuswamy P. Rogue Waves of the Fokas-Lenells Equation // Journal of the Physical Society of Japan. -2012. -Vol.81. -№ 12, 124007.
4. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Ферромагнетика Гейзенберга // Теоретическая математическая физика. -1979. - Т.38.-№1. -С.26–35
5. Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. -2017. - Vol.14. -№7, 1750115.
6. Beibei H, Tiecheng X. The coupled Fokas-Lenells equations by a Riemann-Hilbert approach, arxiv.1711.03861, 2017.