ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

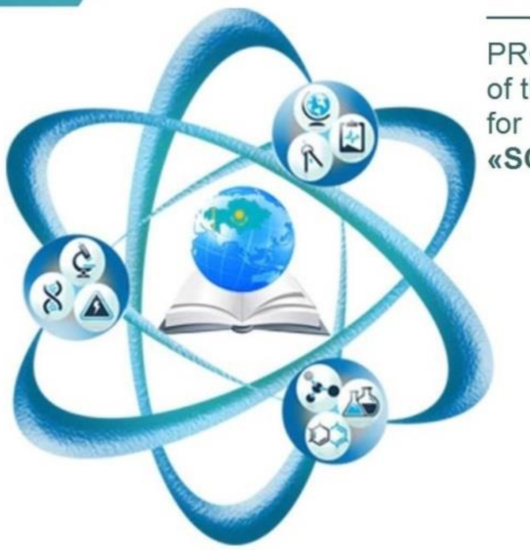
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ТҰҢҒЫШ ПРЕЗИДЕНТІ - ЕЛБАСЫНЫҢ ҚОРЫ

«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ – 2017»

студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ – 2017»

PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2017»



14th April 2017, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

«Ғылым және білім - 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2017»

PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2017»

2017 жыл 14 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясы = The XII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2017» = XII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2017». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2017. – 7466 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-827-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-827-6

УДК 517.51

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ОБОБЩЕННО-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Муканова Аймира Маратовна
Aimira-814@mail.ru
Магистрант механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – А.Игенберлина

В работе рассмотрена следующая задача: найти необходимые и достаточные условия интегрируемости в p-той степени сумм двойных тригонометрических рядов с коэффициентами из класса $R_0^+BVS^2$ с некоторым весом γ. В качестве решения наложены условия на коэффициенты $\{\lambda_{jk}\}$, которые в зависимости от γ, являются достаточными или необходимыми.

В работе изучаются вопросы интегрируемости с весом ряда

$$g(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky \qquad (1)$$

Запишем следующее определение [1]. Нуль-последовательность положительных чисел $c:=\{c_n\}$ принадлежит классу R_0^+BVS, если неравенство $\sum_{n=m}^{\infty}|c_n-c_{n+1}|\le K\cdot c_m$ справедливо для всех натуральных m. Класс таких последовательностей был введен Л.Лейндлером в [1].

Через $g(x)$ обозначим сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx$. В работе [2] Тихонова доказаны следующая теорема:

Теорема А. Пусть $\{\lambda_n\}\in R_0^+BVS$ и $1\le p<\infty$.

1) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_1>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-p-1+\varepsilon_1}\}$ является почти убывающей, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^{p-2}\lambda_n^p<\infty \qquad (2)$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x)|g(x)|^p\in L(0,\pi). \qquad (3)$$

2) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_2>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ является почти возрастающей, то условие (2) необходимо для выполнения условия (3).

Функция $\gamma(x)$ определяется по последовательности $\{\gamma_n\}$ следующим образом: $\gamma(\pi/n):=\gamma_n$, $n\in N$, и существуют положительные константы A и B такие, что $A\gamma_n\le\gamma(x)\le B\gamma_{n+1}$ для $x\in(\pi/(n+1),\pi/n)$. Последовательность положительных чисел $\gamma:=\{\gamma_n\}$ называется почти возрастающей (почти убывающей), если неравенство $C\gamma_n\ge\gamma_m$ $(\gamma_n\le C\gamma_m)$ справедливо для всех натуральных $n\ge m$.

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в различных формулах.

Нашей целью является распространение этих результатов на случай двойного ряда вида

(1). Для начала введем необходимые определения.

Определение 1. Говорят, что последовательность положительных чисел $a:=\{a_{jk}\}$, удовлетворяющая условию $a_{jk}\to 0$ при $j+k\to\infty$ принадлежит классу $R_0^+BVS^2$, если выполняются неравенства $\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\left|\Delta_{11}a_{jk}\right|\le Ca_{mn}$ *при* $m,n\in N$

и
$$\sum_{j=m}^{\infty}\left|\Delta_{10}a_{jk}\right|\le Ca_{mk} \text{ при каждом фиксированном } k,$$
$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|\Delta_{01}a_{jk}\right|\le Ca_{jn} \text{ при каждом фиксированном } j,$$
где $\Delta_{11}a_{jk}=a_{jk}-a_{j+1,k}-a_{j,k+1}+a_{j+1,k+1}$, $\Delta_{10}a_{jk}=a_{jk}-a_{j+1,k}$, $\Delta_{01}a_{jk}=a_{jk}-a_{j,k+1}$.

Определение 2. Говорят, что последовательность положительных чисел $\gamma:=\{\gamma_{mn}\}$ почти возрастает (почти убывает), если для некоторой константы C и для всех натуральных $m_2\ge m_1$, $n_2\ge n_1$ выполнено неравенство
$$C\gamma_{m_2n_2}\ge\gamma_{m_1n_1}\,(\gamma_{m_2n_2}\le C\gamma_{m_1n_1}).$$

Определим функцию $\gamma(x,y)$ по последовательности $\{\gamma_{mn}\}$ следующим образом:
$$\gamma\left(\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)=\gamma_{mn}\quad\forall m,n\in N,$$
и существуют положительные константы A и B такие, что имеют место неравенства:
$$A\gamma_{mn}\le\gamma(x,y)\le B\gamma_{m+1,n+1}\quad\forall x\in\left(\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{m}\right),\, y\in\left(\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right)$$

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $g(x,y)$ - сумма ряда (1), $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^+BVS^2$, $1\le p<\infty$, и последовательность положительных чисел $\{\gamma_{jk}\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{jk}\cdot j^{-1+\varepsilon_1}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k, и последовательность $\{\gamma_{jk}\cdot k^{-1+\varepsilon_2}\}$ почти убывает при каждом фиксированном j. Тогда из условия
$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}(jk)^{p-2}\cdot\lambda_{jk}^{p}<\infty \tag{4}$$
следует, что
$$\gamma(x,y)\,|\,g(x,y)|^p\in L(0,\pi)^2 \tag{5}$$

Теорема 2. Если последовательность γ_{mn} удовлетворяет условию: существуют $\varepsilon_3,\varepsilon_4>0$ такие, что последовательности $\{\gamma_{mn}\,m^{p-1-\varepsilon_3}\}$ является почти возрастающей при фиксированном n, и последовательность $\{\gamma_{mn}\,n^{p-1-\varepsilon_4}\}$ является почти возрастающей при фиксированном m. То условие (4) необходимо для выполнения условия (5).

Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма А.[3] Пусть $\{a_n\ge 0\}$, $\{\lambda_n\ge 0\}$, $p\ge 1$. Тогда верны следующие неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right)^p \le p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\lambda_\nu\right)^p \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu\right)^p \le p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\right)^p. \qquad (7)$$

Эти неравенства называются неравенствами типа Харди-Литтлвуда.

Лемма 1. Пусть $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^+BVS^2$ и $g(x,y)$ - сумма ряда (1). Тогда имеет место неравенство

$$|g(x,y)|\le C\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}. \qquad (8)$$

при $x\in\left[\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{m}\right)$, $y\in\left[\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right)$.

Доказательство теоремы 1. На основании условий теоремы на $\gamma(x)$ и леммы 1 имеем

$$\int_0^\pi\int_0^\pi\gamma(x,y)\,|g(x,y)|^p\,dxdy=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\gamma(x,y)\,|g(x,y)|^p\,dxdy\le C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}|g(x,y)|^p\,dxdy\le$$

$$\le C_2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{jk}\right)^p\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}dxdy\le C_3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{jk}\right)^p\frac{1}{m^2n^2}=C_3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{m^2n^2}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{jk}\right)^p$$

Далее дважды применим неравенство (6) из леммы A. Сначала применим указанное неравенство для внутренней суммы. Для этого введем обозначение $A_{mk}=\sum_{j=0}^{m}\lambda_{jk}$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{m^2n^2}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{jk}\right)^p=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n}A_{mk}\right)^p\le C\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mn}}{n^2}\right)^{1-p}A_{mn}^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\gamma_{mk}}{k^2}\right)^p=$$

$$=C\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mn}}{n^2}\right)^{1-p}\left(\sum_{j=0}^{m}\lambda_{jn}\right)^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\gamma_{mk}}{k^2}\right)^p$$

Учитывая, что последовательность $\left\{\gamma_{mn}n^{-1+\varepsilon_2}\right\}$ почти убывает при каждом фиксированном m, получаем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\gamma_{mk}}{k^2}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\gamma_{mk}k^{-1+\varepsilon_2}}{k^{-1+\varepsilon_2}}\cdot\frac{1}{k^2}\le C\gamma_{mn}n^{-1+\varepsilon_2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon_2}}\le C\gamma_{mn}\cdot n^{-1+\varepsilon_2}n^{-\varepsilon_2}=\frac{C\gamma_{mn}}{n}.$$

Далее снова используем неравенство (6) из леммы A.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mn}}{n^2}\right)^{1-p}\left(\sum_{j=0}^{m}\lambda_{jn}\right)^p\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mk}}{k^2}\right)^p\le C\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mn}}{n^2}\right)^{1-p}\left(\sum_{j=0}^{m}\lambda_{jn}\right)^p\frac{\gamma_{mn}^p}{n^2}=$$

$$=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-p}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{m^2}\left(\sum_{j=0}^{m}\lambda_{jn}\right)^p\le C_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-p}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mn}}{m^2}\right)^{1-p}\lambda_{mn}^p\left(\sum_{j=m}^{\infty}\frac{\gamma_{jn}}{j^2}\right)^p\le$$

$$\le C_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-p}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{mn}}{m^2}\right)^{1-p}\lambda_{mn}^p\frac{\gamma_{mn}^p}{m^p}=C_3\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{n^{2-p}m^{2-p}}\cdot\lambda_{mn}^p=C_3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\cdot(mn)^{p-2}\lambda_{mn}^p$$

Следовательно, $\gamma(x,y)|f(x,y)|^p \in L(0,\pi)^2$

Доказательство теоремы 2.

Из условия (5) следует, что $g(x)\in L(0,\pi)^2$. Действительно, если $p\in(1,\infty)$, то применяя неравенство Гельдера, получим

$$I:=\int_0^\pi\int_0^\pi |g(x,y)|dxdy \le \left(\int_0^\pi\int_0^\pi |g(x,y)|^p\ \gamma(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\pi\int_0^\pi (\gamma(x,y))^{-\frac{p'}{p}}dxdy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

где $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

$$\int_0^\pi\int_0^\pi(\gamma(x,y))^{-\frac{p'}{p}}dxdy = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}(\gamma(x,y))^{-\frac{1}{p-1}}dxdy \le C\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{\gamma_{mn}}\right)^{\frac{1}{p-1}}dxdy \le$$

$$\le C\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{\gamma_{mn}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}dxdy = C_2\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{\gamma_{mn}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{1}{m^2n^2} = C_2\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{n^{p-1-\varepsilon_4}}{\gamma_{mn}n^{p-1-\varepsilon_4}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{1}{m^2n^2} \le$$

$$\le C_3\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{\gamma_{m1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{n^{1-\frac{\varepsilon_4}{p_1}}}{m_2} = C_3\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{m^{p-1-\varepsilon_3}}{\gamma_{m1}m^{p-1-\varepsilon_3}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{n^{-1-\frac{\varepsilon_4}{p-1}}}{m_2} <$$

$$< C_4\left(\frac{1}{\gamma_{11}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty m^{-1-\frac{\varepsilon_3}{p-1}}n^{-1-\frac{\varepsilon_4}{p-1}} \le C.$$

Пусть $p=1$. Тогда

$$\int_0^\pi\int_0^\pi |g(x,y)|dxdy = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}|g(x,y)|dxdy \le C\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{|g(x,y)|\gamma(x,y)}{\gamma(x,y)}dxdy \le$$

$$\le C\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{A\gamma_{mn}}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}|g(x,y)|\gamma(x,y)dxdy \le \frac{C_2}{\gamma_{11}}\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}|g(x,y)|\gamma(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{C_2}{\gamma_{11}}\int_0^\pi\int_0^\pi|g(x,y)|\gamma(x,y)dxdy < C_3$$

Интегрируя $g(x,y)$, получим

$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^y g(s,t)dsdt = \int_0^x\int_0^y\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\lambda_{mn}\sin ms\sin ntdsdt = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\lambda_{mn}\int_0^x\int_0^y\sin ms\sin ntdsdt$$

$$\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{\lambda_{mn}}{mn}(1-\cos mx)(1-\cos ny) = 4\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{\lambda_{mn}}{mn}\sin^2\frac{mx}{2}\sin^2\frac{ny}{2}$$

Следовательно,

$$F\left(\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)=4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{mn}}{mn}\sin^2\frac{m\pi}{2j}\sin^2\frac{n\pi}{2k}\geq 4\sum_{m=\left[\frac{j}{2}\right]}^{j}\sum_{n=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k}\frac{\lambda_{mn}}{mn}\sin^2\frac{m\pi}{2j}\sin^2\frac{n\pi}{2k}$$

$$4\sum_{m=\left[\frac{j}{2}\right]}^{j}\sum_{n=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k}\frac{\lambda_{mn}}{mn}\left(\frac{m}{j}\right)^2\left(\frac{n}{k}\right)^2\geq\frac{4C}{j^2k^2}\sum_{m=\left[\frac{j}{2}\right]}^{j}m\lambda_{mk}\sum_{n=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k}n\geq 4C\lambda_{jk}$$

Далее введем обозначение $d_{\mu,\nu}=\int\limits_{\frac{\pi}{\mu+1}}^{\frac{\pi}{\mu}}\int\limits_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\frac{\pi}{\mu}}|g(x,y)|\,dxdy,\ \mu,\nu\in N$

Имеем

$$\lambda_{jk}\leq CF\left(\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)\leq C\int\limits_0^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}g(s,t)dsdt\leq C\int\limits_0^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}|g(s,t)|\,dsdt=C\sum_{\mu=j}^{\infty}\sum_{\nu=k}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{\mu+1}}^{\frac{\pi}{\mu}}\int\limits_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\frac{\pi}{\nu}}|g(s,t)|\,dsdt=C\sum_{\mu=j}^{\infty}\sum_{\nu=k}^{\infty}d_{\mu,\nu}$$

Далее воспользуемся неравенством (7) и условием теоремы.

$$J:=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}(jk)^{p-2}\lambda_{jk}^p\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}(jk)^{p-2}\left(\sum_{\mu=j}^{\infty}\sum_{\nu=k}^{\infty}d_{\mu\nu}\right)^p=C\sum_{j=1}^{\infty}j^{p-2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}(k)^{p-2}\left(\sum_{\nu=k}^{\infty}\sum_{\mu=j}^{\infty}d_{\mu\nu}\right)^p\leq$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{\infty}j^{p-2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_{jk}k^{p-2}\right)^{1-p}\left(\sum_{\mu=j}^{\infty}d_{\mu k}\right)^p\left(\sum_{\nu=1}^{k}\gamma_{j\nu}\nu^{p-2}\right)^p\leq C_2\sum_{j=1}^{\infty}j^{p-2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_{jk}k^{p-2}\right)^{1-p}\left(\sum_{\mu=j}^{\infty}d_{\mu k}\right)^p\gamma_{jk}^pk^{(p-1)p}=$$

$$=C_2\sum_{k=1}^{\infty}k^{2p-2}\sum_{j=1}^{\infty}j^{p-2}\gamma_{jk}\left(\sum_{\mu=j}^{\infty}d_{\mu k}\right)^p\leq C_3\sum_{k=1}^{\infty}k^{2p-2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(j^{p-2}\gamma_{jk}\right)^{1-p}d_{jk}^p\left(\sum_{\mu=1}^{j}\mu^{p-2}\gamma_{\mu k}\right)^p\leq$$

$$\leq C_3\sum_{k=1}^{\infty}k^{2p-2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(j^{p-2}\gamma_{jk}\right)^{1-p}d_{jk}^p\left(\gamma_{jk}j^{p-1}\right)^p=C_3\sum_{k=1}^{\infty}k^{2p-2}\sum_{j=1}^{\infty}j^{2p-2}\gamma_{jk}d_{jk}^p=C_3\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}j^{2p-2}k^{2p-2}d_{jk}^p\gamma_{jk}$$

Если $p\in(1,\infty)$, то применяя неравенство Гельдера, получим $\left(p'=\frac{p}{p-1}\right)$

$$d_{jk}^p=\left(\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|g(x,y)|\,dxdy\right)^p\leq\left(\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|g(x,y)|^p\,dxdy\right)\left(\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}1^{p'}dxdy\right)^{\frac{p}{p'}}\leq C\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|g(x,y)|^p\,dxdy\left(\frac{1}{j^2k^2}\right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$=C\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|g(x,y)|^p\,dxdy(jk)^{2(1-p)}=C(jk)^{2(1-p)}\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|g(x,y)|^p\,dxdy.$$

Следовательно,

$$J\leq C_4\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}j^{2p-2}k^{2p-2}\gamma_{jk}\int\limits_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|g(x,y)|^p\,dxdy(jk)^{2(1-p)}=C_4\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\gamma(x,y)|g(x,y)|^p\,dxdy$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Leindler L. A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series //Anal.Math. - 2002. - V.28, N4. - P.279-286.
2. Тихонов С.Ю. Об интегрируемости тригонометрических рядов //Мат.заметки. - 2005. - Т.78. - С.476-480.
3. Потапов М.К., Бериша М. Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного //Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). - 1979. - Т.26(40). - С.215-228.

УДК 517.518

ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО СУММИРОВАНИЯ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.

Мукеева Жазира Меркасимовна

argu_0294@mail.ru

магистрант специальности «6М060100-Математика» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – А.М. Темирханова

Пусть $v=\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$, $w=\{w_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\varphi=\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ весовые последовательности, то есть числовые последовательности с неотрицательными членами, $W_i=\sum_{j=1}^{i} w_j$ $\Phi_i=\sum_{j=i}^{\infty}\varphi_j$. Через $l_{q,v}$ обозначим пространство числовых последовательностей $f=\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,v}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}|f_i|^q v_i\right)^{1/q}, \qquad 1\le q<\infty$$

Рассмотрим оператор дробного суммирования порядка α с весом w следующего вида:

$$\left(S_w^{\alpha} f\right)_i=\sum_{j=0}^{i}\frac{f_j w_j}{\left(W_i-W_{j-1}\right)^{1-\alpha}}, \quad i\ge 0, 0<\alpha<1, \tag{1}$$

который был введен в работе [1], где были установлены критерий ограниченности и компактности оператора S_w^{α} из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$.

Целью исследования в данной работе является нахождение необходимых и достаточных условий выполнения весовых неравенств:

$$\left\|S_w^{\alpha} f\right\|_{q,v}\le C\|f\|_{p,w} \quad 0\le f\downarrow \tag{2}$$

$$\left\|S_w^{\alpha} f\right\|_{q,v}\le C^*\|f\|_{p,\varphi} \quad 0\le f\uparrow \tag{3}$$

на конусе монотонных последовательностей используя так называемый принцип двойственности Сойера (см. [2], [3]).

Основные результаты.

Положим

$$A_1=\sup_{k\ge 1}W_k^{-1/p}\left(\sum_{j=1}^{k}W_j^{q\alpha}v_j\right)^{1/q}$$