ЕУРАЗИЯ
ҰЛТТЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ТҰҢҒЫШ ПРЕЗИДЕНТІ - ЕЛБАСЫНЫҢ ҚОРЫ

«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ – 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ – 2017»

PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2017»

14th April 2017, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

«Ғылым және білім - 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2017»

PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2017»

2017 жыл 14 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясы = The XII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2017» = XII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2017». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2017. – 7466 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-827-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-827-6

$$\left\| f_{t,\varepsilon} \right\|_{LM_{p_1\theta_1,\omega_1}} = \left\| \omega_1(r) \left\| f_{t,\varepsilon} \right\|_{L_{p_1}(B(0,r))} \right\|_{L_{\theta_1}(B(t,\infty))} \leq \left\| \omega_1(r) \left\| |y|^{-\frac{n}{p_1}-\varepsilon} \right\|_{L_{p_1}({}^C B(0,t))} \right\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)} = c_2 t^{-\varepsilon} \left\| \omega_1(r) \right\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)}.$$

Полагая $t = z_k$ получим, что

$$\left\| H_\alpha g_{k,\varepsilon} \right\|_{LM_{p_2\theta_2,\omega_2}} \geq \frac{c_1}{c_2} \frac{z_k^\varepsilon \left\| \omega_2(r) r^{\alpha - n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})-\varepsilon} \right\|_{L_{\theta_2}(B(\gamma z_k,\infty)}}{\left\| \omega_1(r) \right\|_{L_{\theta_1}(z_k,\infty)}}$$

следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k^\varepsilon \left\| \omega_2(r) r^{\alpha - n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})-\varepsilon} \right\|_{L_{\theta_2}(B(\gamma z_k,\infty))}}{\left\| \omega_1(r) \right\|_{L_{\theta_1}(z_k,\infty)}} = 0$$

В силу произвольности последовательности $z_k > 0$ таких, что $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, отсюда следует условие (1).

Список использованных источников

1. Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I. Eurasian Mathematical Journal, Volume 3, Number 3, P. 11-32, 2012
2. Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of analysis in general Morrey-type spaces. II. Eurasian Mathematical Journal, Volume 4, Number 1, P. 21-45, 2013
3. V.I.Burenkov, P.Jain, T.V.Tararykova On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces. Eurasian Mathematical Journal, Volume 2, Number 1, P. 52-80 2011

УДК 517.984

ВОЗМУЩЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО КОРРЕКТНОГО СУЖЕНИЯ

Мерзетхан Акерке

merzetkhan.akerke@nisa.edu.kz

Магистрант 2-го курса механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Б. Н. Бияров

В данной работе выделен класс относительно ограниченных возмущений корректных сужений и расширений относительно фиксированного самосопряженного граничного корректного расширения, которые обладают вещественным спектром. В случае дискретного самосопряженного фиксированного оператора доказано, что система собственных векторов возмущенного оператора образует базис Рисса и собственные значения вещественны хотя возмущенный оператор уже не является самосопряженным. Приведены примеры из числа дифференциальных операторов.

Пусть в гильбертовом пространстве H определен линейный оператор L с областью определения $D(L)$ и с областью значения $R(L)$. Ядром оператора L назовём множество

$$KerL = \{f \in D(L):\ Lf = 0\}.$$

Приведём несколько основных определений.

Определение 1.1 *Оператор L называется сужением оператора L_1, а L_1 называется расширением оператора L, если:*

1) $D(L) \subset D(L_1)$,

2) $Lf = L_1 f$, для всех f из $D(L)$.

При этом пишут $L \subset L_1$.

Определение 2.2 *Линейный замкнутый оператор L_0 в гильбертовом пространстве H называется минимальным, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1} на $R(L_0)$.*

Определение 3.3 *Линейный замкнутый оператор $\hat{L}$ в гильбертовом пространстве H называется максимальным, если $R(\hat{L}) = H$ и $Ker\hat{L} \neq \{0\}$.*

Определение 4.4 *Линейный замкнутый оператор L в гильбертовом пространстве H называется корректным, если существует ограниченный обратный оператор L^{-1} определенный на всем H.*

Определение 5.5 *Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовём корректным расширением минимального оператор L_0 (корректным сужением максимального оператора $\hat{L}$), если $L_0 \subset L$ ($L \subset \hat{L}$).*

Определение 6.6 *Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовём граничным корректным , если L является одновременно сужением максимального оператора $\hat{L}$ и корректным расширением минимального оператора L_0, т.е. ($L_0 \subset L \subset \hat{L}$).*

Пусть L_0 и M_0 две минимальные операторы с плотными областями определения в гильбертовом пространстве H, и пусть они сопряжены друг с другом т.е. $(L_0 u, v) = (u, M_0 v)$, для любого u из $D(L_0)$ и для любого v из $D(M_0)$. Тогда максимальные операторы $\hat{L} = M_0^*$ и $\widehat{M} = L_0^*$ удовлетворяют условиям $L_0 \subset \hat{L}$ и $M_0 \subset \widehat{M}$.

В. И. Вишик (см. [1]) доказал, что существует хотя бы одно граничное корректное расширения L минимального оператора L_0 относительно максимального оператора $\hat{L}$, т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}$. Ясно, что $M_0 \subset L^* \subset \widehat{M}$. Тогда обратные ко всем корректным сужениям L_K максимального оператора $\hat{L}$ описывается (см. [2]) так:

$$L_K^{-1} = L^{-1} + K, \tag{1}$$

где, K – произвольный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H со свойством $R(K) \subset Ker\hat{L}$.

Если $D(L_K)$ плотное множество в гильбертовом пространстве H, то $L_K^* = M_K$ описывает всевозможные корректные расширения минимального оператора M_0. Тогда

$$M_K^{-1} = (L^*)^{-1} + K^*.$$

Рассмотрим случай, когда L_0 симметрический минимальный оператор. Это равносильно тому, что $\overline{D(L_0)} = H$ (где черта означает замыкание) и $L_0 \subset \hat{L} = L_0^*$. Пусть L известное самосопряженное граничное корректное расширение минимального оператора L_0, т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}$ и $L = L^*$. Тогда всевозможные корректные сужения L_K максимального оператора $\hat{L}$ имеют описания в виде (1) в терминах обратного оператора. Тогда к прямому оператору L_K соответствует следующая задача:

$$\hat{L}u = f, \text{ длялюбого } f \text{ из } H \tag{2}$$

$$D(L_K) = \{u \in D(\hat{L}) : (I - K\hat{L})u \in D(L)\}, \tag{3}$$

где K – произвольный ограниченный в H линейный оператор со свойством $R(K) \subset Ker\hat{L}$. Тогда основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. 7 *Пусть L_0 – симметрический минимальный оператор, $\hat{L}$ – максимальный* *оператор и L – известное корректное самосопряженное расширение оператора L_0. Если оператор K удовлетворяет следующим условиям:*

1) $R(K^*) \subset D(L)$,

2) $L_K^* K^* = LK^*$,

3) $(KL)L = L(LK^*)$ на $D = \{u \in D(L): Lu \in D(L)\}$,

то спектр корректного сужения L_K, соответствующего задаче (2)-(3), является вещественным числом несмотря на то, что L_K не является самосопряженным оператором. Кроме того, если оператор L с дискретным спектром т.е. L^{-1} является компактным оператором, то спектр корректного сужения L_K состоит из вещественных собственных значений и соответствующая система собственных векторов образует базис Рисса в гильбертовом пространстве H.

Замечание 1.8 *Определяя сопряженный оператор L_K^*, мы имели ввиду, что $\overline{D(L_K)} = H$.*

Далее приведём несколько применений этой абсрактной теоремы к конкретным дифференциальным уравнениям.

Следствие 1. При условий теоремы 1 сопряженный оператор L_K^* так же обладает только вещественным спектром. Кроме того, если L^{-1} компактный оператор, то спектр L_K^* состоит только из вещественных собственных значений и соответствующая система собственных векторов образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Пример 1. Рассмотрим симметрический минимальный оператор L_0 порожденный задачей

$$\begin{cases} \hat{L}y = -\frac{d^2y}{dx^2} = f, \quad \text{длялюбого } f \text{ из } L_2(0,1), \\ D(L_0) = \{y \in W_2^2(0,1): \ y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0\}. \end{cases}$$

Тогда область определение максимального оператора $\hat{L}$ определяется как

$$D(\hat{L}) = W_2^2(0,1).$$

В качестве известного самосопряженного корректного расширения L минимального оператора L_0 берём задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \hat{L}y = -\frac{d^2y}{dx^2} = f, \quad \text{длялюбого } f \text{ из } L_2(0,1), \\ D(L) = \{y \in W_2^2(0,1): \ y(0) = y(1) = 0\}. \end{cases}$$

Всевозможные корректные сужения L_K максимального оператора $\hat{L}$ в терминах обратного оператора имеют вид:

$$y = L_K^{-1}f = -\int_0^x (x-t)f(t)dt + x\int_0^1 (1-t)f(t)dt$$
$$+(1-x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_1(t)}dt + x\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_2(t)}dt,$$

где σ_1 и σ_2 из $L_2(0,1)$ однозначно определяют оператор K:

$$Kf = (1-x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_1(t)}dt + x\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_2(t)}dt.$$

Далее имеем

$$K^*f = \sigma_1(x)\int_0^1 (1-t)f(t)dt + \sigma_2(x)\int_0^1 tf(t)dt.$$

Из условии теоремы 1 $KL^2 = L^2K^*$ на $D = \{u \in D(L): Lu \in D(L)\}$ имеем, что

$$K^*f = (a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_5x)\int_0^1 (1-t)f(t)dt$$
$$+(b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_5x)\int_0^1 tf(t)dt,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 = 0,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_5 = 0,$$
$$20a_1 + 12a_2 + 6a_3 = 0,$$
$$20b_1 + 12b_2 + 6b_3 = 0.$$

Находим оператор L_K^*.

$$L_K^*y = -y''(x) + c_1\sigma_{1''}(x) + c_2\sigma_{2''}(x) = f(x),$$
$$c_1 = \frac{[\sigma_{2'}(1)-1]y'(0)-\sigma_{2'}(0)y'(1)}{\Delta},$$
$$c_2 = \frac{[1+\sigma_{1'}(0)]y'(1)-\sigma_{2'}(1)y'(0)}{\Delta},$$

где $\Delta = -1 + \sigma_{2'}(1) - \sigma_{2'}(0) + \sigma_1(0)\sigma_{2'}(1) - \sigma_{1'}(1)\sigma_{2'}(0)$.

Из условии $R(K^*) \subset D(L)$ и $L_K^*K^* = LK^*$ следует, что $c_1\sigma_1(x) + c_2\sigma_2(x) = 0$. Учитывая, что $\sigma_1(x) = a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_5x$, $\sigma_2(x) = b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_5x$, находим оператор K, который удовлетворяет всем условиям теоремы 1. После некоторых вычислений имеем, что

$$\sigma_1(x) = a(x^5 - \tfrac{5}{2}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x), \quad \sigma_2(x) = -\sigma_1(x),$$

где a – вещественное число. Тем самым получим оператор L_K^*, соответсвующий задаче

$$\begin{cases} L_K^*y = -y''(x) + 15a(2x^3 - 3x^2 + x)[y'(0) + y'(1)] = f(x), \\ \\ D(L_K^*) = \{y \in W_2^2(0,1):\ y(0) = y(1) = 0\}, \end{cases}$$

который вес спектр состоит из вещественных собственных значений и соотвествующие собственные функций образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$. Заметим, что оператор L_K имеет область определения

$$D(L_K) = \{y \in W_2^2(0,1):\ y(0) + y(1) = 0,$$
$$(3-a)y(0) = 20a\int_0^1 (2t^3 - 3t^2 + t)y(t)dt\}.$$

У оператора L_K все собственные значения вещественный и соответсвующая система собственных векторов образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Список использованных источников

1. Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Моск. матем. общества. 1952. Т. 1, С. 187-246.
2. Кокебаев Б. К., Отелбаев М., Шыныбеков А. Н. О расширениях и сужениях операторов в Банаховом пространстве // УМН. 1982. Т.37, №4. С. 116-123.