ЕУРАЗИЯ
ҰЛТТЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ТҰҢҒЫШ ПРЕЗИДЕНТІ - ЕЛБАСЫНЫҢ ҚОРЫ

«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ – 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ – 2017»

PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2017»

14th April 2017, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

«Ғылым және білім - 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2017»

PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2017»

2017 жыл 14 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясы = The XII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2017» = XII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2017». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2017. – 7466 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-827-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-827-6

$\sum\limits_{m \in D} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2 (m,m) t} e^{2\pi i (m,x)}$ қосындысына алмастыруға болады.

Теорема дәлелдеуі $s = 3,4,5,\ldots$ жағдайларына оңай көшіріледі. Осы зерттеуді мына жағдайларда одан әрі дамытуға болады:

1) $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = \alpha < 0$, $(r_1, r_2, \ldots, r_s) \in R^s$;

2) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \in R^s$, $(r_1, r_2, \ldots, r_s) \in R^s$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази – Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Спец. выпуск, Астана, 2010.
2. Ажгалиев Ш.У. О дискретизации решений уравнений теплопроводности. Матем. заметки, 82:2 (2007), 177-182.

УДК. 517.51

РЯДЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ

Байсалбаева Лаура Есеновна

lbaisalbayeva@mail.ru

Магистрант механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Ж.Б. Муканов

В данной работе показано, что коэффициенты Фурье функций ограниченной Λ-вариации, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$, равны $O(\lambda_n / n)$. Это было известно для $\lambda_n = n^{\beta+1}, -1 < \beta < 0$. Показано, что классы *L* и HBV - дополнительные, а *L* и ΛBV не являются дополнительными, если класс ΛBV не вложен в класс HBV. Показано, что частичные суммы рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации равномерно ограничены, приведено доказательство аналога теоремы Дирихле для этого класса функций без использования признака Лебега.

В [1] показано, что функции ограниченной гармонической вариации (HBV) удовлетворяют признаку Лебега сходимости их рядов Фурье, но если класс функций ограниченной Λ-вариации (ΛBV) не вложен в класс HBV, он содержит функции, ряд Фурье которых расходится.

В данной работе приводится оценка коэффициентов Фурье функций из класса ΛBV. Мы докажем аналог теоремы Дирихле для функций из HBV, не прибегая к признаку Лебега, а также покажем, что частичные суммы рядов Фурье функций из класса HBV равномерно ограничены. Из этого можно заключить, что классы *L* и HBV являются дополнительными, то есть справедливо равенство Парсеваля (с обычной сходимостью) для $f \in L$ и $g \in \mathrm{HBV}$. Мы увидим, что *L* и ΛBV не являются дополнительными, если ΛBV не является подклассом HBV.

Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$, $\Lambda = \{\lambda_n\}$ -неубывающая последовательность положительных чисел, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=+\infty$ и $\{I_n\}$- последовательность неперекрывающихся промежутков $I_n=[a_n,b_n]\subset[a,b]$. Функция f называется функцией ограниченной Λ-вариации (ΛBV), если для любой последовательности $\{I_n\}$ выполняется $\sum_{n=1}^{\infty}|f(a_n)-f(b_n)|/\lambda_n<+\infty$. Супремум этих сумм называется Λ-вариацией функции f и обозначается $V_\Lambda(f;[a,b])$. При $\Lambda=\{n\}$ данный класс называют функциями ограниченной гармонической вариации (HBV).

Положим $[a,b]=[0,2\pi]$ и функция f имеет период 2π. Классы функций K и K_1 называются дополнительными [3], если для $f\in K$ и $g\in K_1$ выполняется

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fgdx=\frac{1}{2}a_0a_0^{'}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_ka_k^{'}+b_kb_k^{'}),$$

где a_k, b_k - коэффициенты Фурье функции f и $a_0^{'}$, $b_k^{'}$- коэффициенты Фурье функции g. Предполагаем, что ряд справа сходится.

Докажем следующие результаты.

Теорема 1. Если $f\in\Lambda\mathrm{BV}$, то коэффициенты Фурье функции f равны $O(\lambda_n/n)$.

Теорема 2. Классы L и HBV – дополнительные. Если класс ΛBV не вложен в класс HBV, то L и ΛBV не являются дополнительными.

Теорема 3. Если $f\in\mathrm{HBV}$, то частичные суммы ряда Фурье функции f равномерно ограничены. Ряд сходится всюду и равномерно сходится на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим коэффициенты b_n. Имеем

$$\pi b_n=\int_0^{2\pi}f(t)\sin ntdt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\int_0^{\pi}f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\sin tdt=$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{2n-1}{}^{*}\left[f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\right]\sin tdt,$$

где * означает суммирование по нечетным индексам. Следовательно,

$$\pi|b_n|\le\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{2n-1}{}^{*}\left|f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\right|dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sum{}^{*}\frac{1}{\lambda_k}|\ldots|\lambda_k dt.$$

Применяя преобразование Абеля, получим, что это выражение равно $O(\lambda_n/n)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in L$, $g\in\mathrm{HBV}$ и $S_n(g,x)$ - n-ная частичная сумма ряда Фурье функции g. Тогда

$$\Delta_n=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}fgdx-\left[\frac{1}{2}a_0a_0^{'}+\sum_{k=1}^{n}(a_ka_0^{'}+b_kb_k^{'})\right]\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}(g-S_n(g))fdx\right|.$$

По теореме 3 $S_n(g) \to g$ всюду и $S_n(g)$равномерно ограничены. Применяя теорему о мажорируемой сходимости, получим $\Delta_n \to 0$. Таким образом, классы L и HBV – дополнительные.

Положим теперь, что класс ΛBV не вложен в класс HBV, и покажем, что тогда существуют функции $f_0 \in L$, $g_0 \in \Lambda\mathrm{BV}$, такие, что $\left\{ \int_0^{2\pi} f_0 S_n(g_0) dx \right\}$ является расходящейся последовательностью.

Наше предположение эквивалентно существованию невозрастающей последовательности положительных чисел a_n, такой, что ряд $\sum a_n / \lambda_n$ сходится, а $\sum a_n / n$ расходится. Пусть $g_n(x)$ - 2π-периодическая функция, определенная на отрезке $[0,2\pi]$, равна a_i, при $(2i-2)\pi < \left(n+\frac{1}{2}\right)x < (2i-1)\pi$, $i = 1,....,n+1$, и 0 в остальных точках. Очевидно, что $g_n \in \Lambda\mathrm{BV}$. Теперь ΛBV является банаховым пространством с нормой [4]

$$\|g\|_\Lambda = |g(0)| + V_\Lambda(g;[0,2\pi]).$$

Имеем

$$V_\Lambda(g_n;[0,2\pi]) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i (1/\lambda_{2i-1} + 1/\lambda_{2i}) \le 2\sum_{i=1}^{n+1} a_i / \lambda_i .$$

Следовательно,

$$\|g_n\|_\Lambda \le 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i / \lambda_i = C < \infty$$

для любого n. Теперь

$$\sup_x |S_n(g_n,x)| \ge |S_n(g_n,0)| = \frac{1}{\pi}\left| \int_0^{2\pi} g_n(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} dt \right| = \frac{1}{\pi}\left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} g_n\left(\frac{t+k\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin t}{\sin(t+k\pi)/(2n+1)} dt \right| \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n+1} a_i \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+(2i-2)\pi} dt \ge \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n+1} a_i /(2i-1) > \frac{2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n+1} a_i / i,$$

подразумевая, что $\sup_x |S_n(g_n,x)| \ne O(1)$.

Пусть $P_n(f)$- непрерывный линейный функционал на L, заданный как

$$P_n(f) = \int_0^{2\pi} f S_n(g_n) dx .$$

Тогда

$$\|P_n\| = \sup_x |S_n(g_n,x)| \ne O(1),$$

подразумевая, что существует $f_0 \in L$, такая, что

$$P_n(f_0) \neq O(1)$$

Пусть $Q_n(g)$ - непрерывный линейный функционал на ΛBV, заданный как

$$Q_n(g) = \int_0^{2\pi} f_0 S_n(g)dx .$$

Тогда

$$\|Q_n\| \geq |Q_n(g_n)| / \|g_n\|_\Lambda \geq |P_n(f_0)| / C \neq O(1) .$$

Следовательно, существует g_0 в ΛBV, такая, что $Q_n(g_0) \neq O(1)$, что означает $\left\{ \int_0^{2\pi} f_0 S_n(g_0)dx \right\}$ расходится.

Доказательство теоремы 3. Положим $f \in \mathrm{HBV}$. Если $S_n(x)$ - *n*-ная частичная сумма ряда Фурье функции *f*, то для любого $\delta > 0$,

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \left(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1)$$

равномерно по *x*. Так как $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют в каждой точке, положим $f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right]$ для любого *x*. Следовательно, предыдущий интеграл можно переписать следующим образом

$$\int_0^{\delta} (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_0^{\delta} (f(x-t) - f(x-0)) \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Рассмотрим первое слагаемое, второе можно рассмотреть аналогичным образом.
Обозначим $h(t) = f(x+t) - f(x+0)$. Заметим, что

$$\left| \int_0^{\pi/n} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt \right| < \pi \sup_{0<t<\pi/n} |h(t)| = o(1)$$

для любого x и равномерно на замкнутых интервалах точек непрерывности. Это выражение также равномерно ограничено. Далее

$$\int_{\pi/n}^{\delta} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \sum_1^N \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt + \int_{(N+1)\pi/n}^{\delta} h(t) \frac{\sin nt}{t} dt = I_1 + I_2 ,$$

где $N+1=[n\delta/\pi]$. Очевидно, $I_2=o(1)$ равномерно по *x* и

$$I_1=\int_0^{\pi}\sum_1^N h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)(-1)^k\,\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt\,.$$

При четном N абсолютная величина подынтегрального выражения ограничивается выражением:

$$\left|\sum_1^{N-1}{}^{*}\left[h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\frac{1}{t+k\pi}-h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)\frac{1}{t+(k+1)\pi}\right]\right|,$$

где * означает суммирование по нечетным индексам. Если N – нечетно, то

$$\int_{N\pi/n}^{(N+1)\pi/n}h(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt=o(1)$$

так же, как и I_2, удалив этот член, сведем к задаче, в которой сумма имеет четное число членов. Поэтому положим, что N - четное. Общий член рассматриваемой суммы равен

$$\left[h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)-h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{t+k\pi}-h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)\left[\frac{1}{t+k\pi}-\frac{1}{t+(k+1)\pi}\right].$$

Учитывая, что $\varepsilon>0$ и выбирая N_o так, чтобы $\sum_{N_0+1}^{\infty}1/k^2<\varepsilon$, имеем

$$\left|\sum_1^{N-1}{}^{*}h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)\left[\frac{1}{t+k\pi}-\frac{1}{t+(k+1)\pi}\right]\right|\le\sum_1^{N-1}{}^{*}\left|f\left(x+\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)-f(x+0)\right|/k^2=\sum_1^{N_0}{}^{*}+\sum_{N_0+1}^{N-1}{}^{*}$$

и вторая сумма ограничена числом $2\varepsilon\sup|f(x)|$. Первая сумма ограничена числом

$$\sup_{0<t<(N_0+2)\pi/n}|f(x+t)-f(x+0)|\cdot\sum_1^{N_0}{}^{*}1/k^2\,,$$

который равен $o(1)$ при $n\to\infty$ для любого *x*, $o(1)$ равномерно по *x* в любом замкнутом интервале точек непрерывности, и равномерно ограничена по *n* и *x*.

Наконец, имеем

$$\left|\sum_1^{N-1}{}^{*}\left[h\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)-h\left(\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{t+k\pi}\right|\le\sum_1^{N-1}{}^{*}\left|f\left(x+\frac{t+k\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{t+(k+1)\pi}{n}\right)\right|/k\le$$
$$\le V_H\left(\overline{f};[x,x+\delta]\right),$$

где $\overline{f}(t)$ равна $f(t)$ на $(x, x+\delta]$ и $\overline{f}(t) = f(x+0)$. Теперь

$$V_H\left(\overline{f};[x, x+\delta]\right) < \varepsilon$$

если δ достаточно мало, поскольку $\overline{f}$ непрерывна справа в точке x [4]. Если f непрерывна в каждой точке отрезка I, то мы можем выбрать такое $\delta > 0$, что $V_H\left(f;[x, x+\delta]\right) < \varepsilon$ для любого $x \in I$. Очевидно, что сумма ограничена числом $V_H\left(f;[0,2\pi]\right)$ для любых n и x.

Список использованных источников

1. D. Waterman. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 44, 1972, С. 107-117.
2. D. Waterman. On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Studia Math. 55, 1976, С. 87-95.
3. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, Том I.- М.:Мир, 1965, С. 254-255.
4. D. Waterman. On Λ-bounded variation // Studia Math. 57, 1976, С. 33-45.

УДК 517

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРЯМОЙ

Бекмырза Г.Ш.

bekmyrzagulnur@mail.ru

Магистрант 2 курса механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Кусаинова Л.К.

В работе рассматривается самосопряженный оператор

$$Ly = -\rho(x)y'' + q(x)y$$

в $L_2 = L_2(R)$, где $\rho > 1$, $q > 1$ непрерывные функции в $R = (-\infty, \infty)$,

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q\rho^{-1}dt > 0.$$

Через L_2 обозначается пространство суммируемых с квадратом функций $f: R \to R$.

Положим

$$\left(\frac{q}{\rho}\right)^*(x) = sup\left\{h > 0: h\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} q\rho^{-1}dt \le 1\right\}.$$

Функция $\left(\frac{q}{\rho}\right)^*(x)$ положительна и конечна для всех $x \in R$.

Теорема. Пусть ρ и q удовлетворяют следующим условиям. Существуют такие положительная непрерывная в R функция $h(\cdot)$ и $a > 1$, что для всех $x \in R$:

i) $a^{-1} < \frac{h(t)}{h(x)}, \ \frac{\rho(t)}{\rho(x)} < a$, если $|t-x| < \frac{h(x)}{2}$;

ii) $40a^6 h(x)^{-1} \sup_{|t-x|<\frac{h(x)}{2}} \sqrt{\left(\frac{q}{\rho}\right)^*(x)} < 1.$

Тогда оператор L имеет обратный.

Следствие. Пусть ρ и q удовлетворяют условиям теоремы. Тогда для любого $f \in L_2$ уравнение