bulmathmc.enu.kz

ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326

EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№4 (125)/2018

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of the L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№4(125)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_ math@enu.kz*

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 25 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;
tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный секретарь, компьютерная верстка
А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТIНIҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №4(125)/2018

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №4(125)/2018

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА, №4(125)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, том 125, №4, 75-94 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **06.52.13, 06.52.17**

В.И. Малыхин [1], К.Б. Нуртазина [2]

[1] *Государственный университет управления, Москва, Россия,*
[2] *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
(E-mail: [1] slava.sc@gmail.com, [2] knurtazina@mail.ru)

Математический анализ инвестиционных процессов в условиях неопределенности

Аннотация: Предлагаются аксиоматический подход к исследованию фондового рынка и оценка эффективности портфеля ценных бумаг. Для исследуемых трех параметров фондового рынка найдена содержательная интерпретация. При исследовании модели финансового инвестирования оптимальное решение определяется условиями на момент формирования модели. В реальной жизни эти условия носят изменчивый характер. Изменение параметров исходной модели требует оценки изменения оптимального решения. Рассмотрены методы анализа чувствительности, основанные на принципе минимакса и связанной с ним важной в смысле экономических приложений теории двойственности.

Ключевые слова: параметры фондового рынка, эффективность портфеля, портфель минимального риска, портфель максимальной эффективности, короткие продажи, минимакс, двойственность.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182-2018-125-4-75-94

Введение

В научной литературе имеется огромное количество подходов к анализу финансового инвестирования. Причем эти подходы во многом менялись в зависимости от состояния развития мировой экономики. Особенно ярко эти перемены наблюдаются в период ускоренной глобализации всех процессов развития общества. Индустрия финансовых услуг претерпевает значительные изменения. Меняются границы между традиционными секторами промышленности, конкуренция носит все более глобальный характер. В настоящее время экономики многих стран находятся в состоянии кризиса. Поэтому идеализированные математические модели дают лишь приближенное представление о действительности, и результаты исследований, основанных на моделях такого рода, должны применяться с осторожностью.

И только анализ экономики посредством фундаментальной математики, вне зависимости от политических катаклизмов, на все времена останется основополагающим и надежным инструментарием.

Исторически основополагающими работами в исследуемой области являются статьи [1-5]. К настоящему времени математический анализ финансового инвестирования вышел на высокий уровень математической сложности и абстракции. Так, фундаментальная работа [6,7] содержит теоремы теории расчета финансовых активов, теоремы о полноте на безарбитражном рынке и описании структуры цен в полных безарбитражных моделях финансовых рынков. Ученики Ширяева А.Н. в работе [8] отразили ключевые и весьма сложные результаты современной теории хеджирования и инвестирования с сохранением математической строгости.

В классических работах процесс броуновского движения обладает свойством независимых приращений, когда текущая цена не влияет на будущую цену. Фактически же, текущая цена акций может повлиять на цену в будущем и процесс броуновского движения не подходит полностью для объяснения цены акций. В работе [9] предложен процесс дробного броуновского движения, позволяющий учесть свойство, зависящее от дальности расстояния между движущимися частичками информации о поведении цены акций. Здесь учитываются два параметра: норма доходности и волатильность, с учетом их изменчивости по времени.

Анализ перспективных возможностей применения модели Марковица к современной теории портфеля с эффективными компьютерными кодами отражен в работе [10].

В последнее время многие исследования посвящены нормализации ковариационной матрицы. Количественная оценка степени статистической неопределенности, называемая «шумом», изучается с помощью матрицы корреляции, когда отфильтровывается та часть информации, которая является надежной. Такие матрицы используются при оптимизации рисковых портфелей, но с предположением знания о будущем состоянии. Для решения такой проблемы в статье [11] задача оптимизации портфеля решается путем тестирования посредством нескольких процедур фильтрации, примененных к матрице корреляции. Эффективность таких процедур оценивается путем сравнения прогнозируемых и реализованных риск-доходностей.

В классической теории портфеля Марковица веса оптимизируемых портфелей прямо пропорциональны обратной корреляционной матрице активов. Тем не менее, большинство современных исследований по оптимизации портфеля сосредоточено на оптимизации самой корреляционной матрицы, а не обратной ей. В работе [12] доказывается ошибочность такого подхода, где с точки зрения теории больших данных показано, что обратная корреляционная матрица гораздо более неустойчива и чувствительна к случайным возмущениям, чем сама корреляционная матрица. Показано, что оптимизация обратной матрицы корреляции добавляет больше информации для оптимального выбора портфеля, чем сама корреляционная матрица. Кроме того, демонстрируются эмпирические результаты перераспределения портфеля при различных вариантах общей структуры портфеля, что доказывает, что такой подход значительно превосходит по качеству ранее известные стратегии распределения портфеля. Более того, результаты [12] являются новыми в области Data Science, расширяют область практических применений, в частности, в здравоохранении или геномике.

В большинстве работ по анализу риска изучение основных нормативных стандартов риска сосредоточено на работе отдельных фирм в изоляции. В статье [13] авторы разработали аксиоматическую основу для широкого класса системных рисков, основанных на анализе совместного распределения прибылей и убытков по всем фирмам в экономике и в состояниях природы. С этой точки зрения системный риск служит регулятором выбора предпочтений через наборы возможных распределений результатов для всей экономики.

Методы построения эффективных портфелей изучены в [14,15].

Несколько слов о некоторых особенностях современных исследований проблемы двойственности. Классические подходы к проблеме оптимизации отражены в [16].

Большинство современных подходов к решению задач дробно-линейного программирования зависит от метода симплексного типа. В работе [17] предложен новый подход к решению таких задач, не зависящих от симплекс-метода, с применением двойственности. Алгоритм сравнивается с известными методами.

В последнее время для решения задач в условиях неопределенности используется двойственный симплекс-метод для задач линейного программирования с трапециевидными нечеткими переменными. Так, в [18] для такого типа задач получены результаты в виде теорем о слабой и сильной двойственности.

Описанные выше источники [1-18] не претендуют на полноту и лишь частично затрагивают основную тематику, близкую к нашим исследованиям.

Основу предлагаемой нами статьи составляют научные результаты авторов, а также многолетний опыт их совместного сотрудничества в области математического анализа экономики [19-30]. Существенный вклад в формирование концепций заложили учебники первого автора [31-35], четыре из которых переведены вторым автором на казахский язык и востребованы как среди обучающихся, так и преподавателей.

В данной статье предложен аксиоматический подход к исследованию фондового рынка и дана оценка эффективного портфеля ценных бумаг. Для исследуемых трех параметров фондового рынка найдена содержательная интерпретация. При исследовании модели финансового инвестирования оптимальное решение определяется условиями на момент формирования модели. В реальной жизни эти условия носят изменчивый характер. Изменение параметров исходной модели требует оценки изменения оптимального решения.

Мы также предлагаем методы анализа чувствительности, основанные на принципе минимакса и связанной с ним важной в смысле экономических приложений теории двойственности. При этом учитываются некоторые авторские особенности обобщенной теории двойственности

Статья состоит из введения и двух частей. Каждая часть имеет самостоятельную нумерацию разделов и формул.

1 Аксиоматический подход к анализу фондового рынка

Фондовый рынок рассматривается как статический, его функционирование исследуется только на одном временном промежутке. Доходность ценной бумаги за один временной промежуток измеряется в процентах годовых и есть случайная величина ξ. Математическое ожидание случайной величины ξ называется эффективностью и обозначается e. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ обозначаются соответственно v и σ. Последняя величина отождествляется с риском обладания данной ценной бумагой. Сама ценная бумага в дальнейшем отождествляется со случайной величиной ξ.

На рынке обращаются n видов ценных бумаг. Вектор-столбец $E = (e_i)$ размерности n есть вектор эффективностей ценных бумаг. Подразумевается, что среди ценных бумаг есть бумаги с ненулевой эффективностью, $E \neq 0$.

<u>*Аксиома фондового рынка.*</u> На фондовом рынке есть хотя бы две бумаги, эффективности которых не равны.

Это единственное предположение о фондовом рынке, которое будет использоваться.

Для экономии векторы-столбцы записаны в виде строк. Корреляционный момент случайных величин ξ_i и ξ_j называется их ковариацией и обозначается v_{ij}. Матрица ковариаций обозначается V. Она является симметрической и предполагается положительно определенной. Это означает, что $X^T V X > 0$, если $X \neq 0$. Если V не являлась бы положительно определенной, то существовала бы линейная комбинация ценных бумаг, которая была бы безрисковой. Однако такой случай – наличие на рынке безрисковой бумаги – исследуется особо и специально оговаривается. Для случайных величин ξ_i и ξ_j имеем $|v_{ij}| \leq \sigma_i \sigma_j$. Из положительной определенности матрицы V вытекает, что она имеет обратную матрицу V^{-1}, которая также симметрическая и положительно определенная.

Введем вектор-столбец I размерности n, все компоненты которого есть 1. Обозначим $b = E^T V^{-1} E, a = E^T V^{-1} I, c = I^T V^{-1} I, d = bc - a^2$.

Числа a, b, c, d называются *параметрами фондового рынка.* Данная статья посвящена анализу их содержательного смысла.

Из положительной определенности матрицы V и обратной к ней вытекает, что $b, c > 0$.

c есть сумма всех элементов матрицы V^{-1} и эта сумма положительна.

a есть сумма всех элементов матрицы, полученной из матрицы V^{-1} умножением всех элементов каждой i-й строки на e_i.

b есть сумма всех элементов матрицы, полученной из матрицы V^{-1} сначала умножением всех элементов каждого j-го столбца на e_j, а затем умножением каждой i-й строки на e_i и эта сумма положительна.

Параметр d носит произвольный характер, поэтому пока установим его положительность. Рассмотрим вектор $E + tI$, где t- какое-нибудь число. Сформулированная выше Аксиома фондового рынка утверждает, что ни при каком t этот вектор не равен 0. Покажем, что отсюда вытекает, что $d = bc - a^2 > 0$.

В силу положительной определенности матрицы V и обратной к ней имеем $(E + tI)^T V^{-1}(E + tI) > 0$, т.е. $E^T V^{-1} E + 2tE^T V^{-1} I + t^2 I^T V^{-1} I > 0$ при любом t, но это возможно только если $(2E^T V^{-1} I)^2 - 4(E^T V^{-1} E)(I^T V^{-1} I) < 0$, так что $a^2 - bc < 0$ или $d > 0$.

Итак, можно сделать вывод: $d > 0$.

Символ R обозначает множество действительных чисел.

Портфель ценных бумаг – это вектор-столбец $X = (x_i)$ размерности n, в котором x_i есть доля стоимости i-й ценной бумаги в стоимости всего портфеля, так что $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Это означает, что стоимость всего портфеля принята за единицу. Тогда условие, что X есть портфель, запишется, как $I^T X = 1$. Доходность портфеля X есть случайная величина $\xi_X = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$, эффективность портфеля $e_X = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i = E^T X$, его дисперсия $v_X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i v_{ij} x_j = X^T V X$. Среднее квадратическое отклонение доходности портфеля $\sigma_X = \sqrt{v_X}$ отождествляется с риском портфеля и обозначается r_X. Классическая теория портфеля сводится к исследованию взаимоотношений между его эффективностью и риском, причем желательно эффективность иметь больше, а риск – меньше.

Пакетом ценных бумаг называется любой вектор-столбец $Y = (y_i)$ размерности n, т.е. числа ценных бумаг, y_i трактуется как стоимость i-й ценной бумаги в портфеле, так что величина $\sum_{i=1}^{n} e_i y_i = E^T Y$ есть средняя величина процентных денег, полученных от пакета, эта величина называется доходом (или прибылью) пакета p_Y. В отличие от портфеля доход пакета измеряется в абсолютных (денежных) единицах. Величина $\sum_{i=1}^{n} y_i = I^T Y$ трактуется как размер собственного капитала, вложенного в пакет. Величина же $Y^T V Y$ есть дисперсия дохода пакета $v_Y, \sigma_Y = \sqrt{v_Y}$ отождествляется с риском пакета и обозначается r_Y. Теория пакета сводится к исследованию взаимоотношений между его доходом и риском, причем желательно доход иметь больше, а риск – меньше. В отличие от портфеля, собственный капитал пакета может быть и неположительным – такой пакет естественно назвать спекулятивным. Если на рынке есть хотя бы два вида ценных бумаг различной эффективности и операция коротких продаж допустима, тогда есть спекулятивные пакеты, дающие сколь угодно большой доход (конечно, и риск при этом растет). Впрочем, портфель всегда можно понимать как пакет стоимостью ровно в одну денежную единицу.

Портфельный вкладчик озабочен рациональностью своих действий, а пакетный – возможностью получить больше дохода – процентных денег.

<u>Оптимальный портфель Марковица с операцией коротких продаж.</u> Оптимизационная задача Г. Марковица:

$$\begin{array}{c} X^T V X \to \min \\ E^T X = e_P,\, I^T X = 1 \end{array}. \tag{1}$$

Здесь e_P - заданная эффективность портфеля X.

Решение задачи с помощью функции Лагранжа

$$L(X, t, s) = X^T V X + t(e_P - E^T X) + s(1 - I^T X)$$

дает

$$X = \frac{bV^{-1}I - aV^{-1}E}{d} + \frac{e_P(cV^{-1}E - aV^{-1}I)}{d} = G + He_P,$$

где

$$G = \frac{bV^{-1}I - aV^{-1}E}{d}, H = \frac{cV^{-1}E - aV^{-1}I}{d}. \tag{2}$$

Решение задачи (1):

$$X = G + He_P, \tag{3}$$

где G, H – некоторые векторы-столбцы размерности n.

Найденные при всевозможных e_P портфели – эффективные портфели Марковица – это портфели минимального риска из всех портфелей заданной эффективности.

Теперь о точном смысле формул (2) и (3). Пусть стоимость всего портфеля равна S. Понятно, что если $x_i \geq 0$, то это означает рекомендацию купить i-х ценных бумаг на сумму, составляющую долю x_i от стоимости всего портфеля. А если $x_i < 0$, то это означает для вкладчика необходимость проделать операцию коротких продаж.

Вкладчик находит участника рынка, имеющего данную ценную бумагу, и обязуется через определенный срок поставить ему данных бумаг на обсуждаемую сумму $|S \cdot x_i|$ (в нашей модели рынка цены стабильны) вместе с тем доходом, который эти бумаги за этот срок принесут; за это сейчас он получает деньги в указанном размере $|S \cdot x_i|$ и распоряжается ими по своему усмотрению: вкладывает в нужные ему ценные бумаги, может прибегнуть к банковскому кредиту или же выпустить свои собственные ценные бумаги.

Если же такие операции на рынке не практикуются или неприемлемы для вкладчика, то приходится требовать неотрицательность переменных x_i .

Как следует из (3), в пространстве долей, подпространстве R^n , множество эффективных портфелей Марковица представляет собой прямую линию, проходящую через векторы G , $G+H$ (e_P играет роль параметра вдоль этой прямой).

Показано, что $\sum_{i=1}^n g_i = 1$, $\sum_{i=1}^n h_i = 0$ или $I^T G = 1$, $I^T H = 0$. То есть формулы (2) и (3) действительно определяют в R^n множество портфелей (конечно, не всех, а только эффективных портфелей Марковица).

Доказано, что $E^T G = 0, E^T H = 1$.

Итак,

$$I^T G = 1,\ I^T H = 0, E^T G = 0, E^T H = 1, E^T (G+H) = 1. \tag{4}$$

Здесь G и $G+H$ – портфели, причем G имеет эффективность 0, а $G+H$ имеет эффективность 1. Представление оптимального решения задачи (1) называется разложением по двум фондам $G,\ H$, причем G есть портфель и эффективность G равна 0, наоборот, H имеет эффективность 1, а сумма его компонент равна 0. Получается, что к портфелю G эффективности 0 прибавляется «добавок» He_P эффективности e_P с нулевой суммой компонент и получается произвольный портфель Марковица эффективности e_P .

Найдем теперь дисперсию портфелей, представленных векторами G и $G+H$, и ковариации портфелей, представленных этими векторами.

Имеем $G^T V G = (\frac{1}{d})^2 (bI^T - aE^T) V^{-1} (bI - aE) = (\frac{1}{d})^2 (b^2 c - ba^2 - a^2 b + a^2 b) = \frac{b}{d}$. Аналогично, $H^T V H = \frac{c}{d}$, $G^T V H = -\frac{a}{d}$. Отсюда получаем $(G+H)^T V (G+H) = G^T V G + G^T V H + H^T V G + H^T V H =$

$$= \frac{b}{d} - \frac{a}{d} - \frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{(b-a)+(c-a)}{d}.$$

Поскольку дисперсия неотрицательна, то должно быть $b+c > 2a$. Но это так и есть, поскольку у нас $bc > a^2$.

Итак,

$$G^T V G = \frac{b}{d}, H^T V H = \frac{c}{d}, G^T V H = H^T V G = -\frac{a}{d}, (cE^T - aI^T) V^{-1} (cE - aI) = cd. \tag{5}$$

Поскольку $G^T V G = \frac{b}{d}$, $H^T V H = \frac{c}{d}$ и $b, c > 0$, то $G, H \neq 0$. Из $c, d > 0$, следует $cE - aI \neq 0$, так что $E \neq \frac{a}{c} I$, что дает подтверждение Аксиоме фондового рынка.

Найдем теперь зависимость дисперсии или вариации (или квадрата риска) эффективного портфеля Марковица от заданной его эффективности. Дисперсия такого портфеля обозначена v_P и некоторые выкладки с использованием формул (5) дают:

$$v_P = (\frac{c}{d}) e_P^2 - 2(\frac{a}{d}) e_P + \frac{b}{d}. \tag{6}$$

Дискриминант полученной квадратичной функции равен $(-\frac{4}{d}) < 0$, минимум этой функции достигается при $e_P = \frac{a}{c}$ и сам минимум равен $\frac{1}{c} > 0$.

Пусть $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. Найдем эффективные портфели Марковица.

Имеем $V^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$. Вычисляем параметры рынка: $a = E^T V^{-1} I = -3$, $b = E^T V^{-1} E = 18$, $c = I^T V^{-1} I = 1$, $d = bc - a^2 = 9$. Находим два вектора G, H : $G = \frac{bV^{-1}I - aV^{-1}E}{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $H = \frac{cV^{-1}E - aV^{-1}I}{d} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Окончательно, множество эффективных портфелей Марковица есть $M_E = \{ \left(\frac{2}{-1}\right) + e_P \left(\frac{-1/3}{1/3}\right) \ : \ e_P \in R \}$

Доказано, что все эти прямые линии представляют одну единственную прямую, проходящую через две точки $(x_1 = 1, x_2 = 0)$, $(x_1 = 0, x_2 = 1)$.

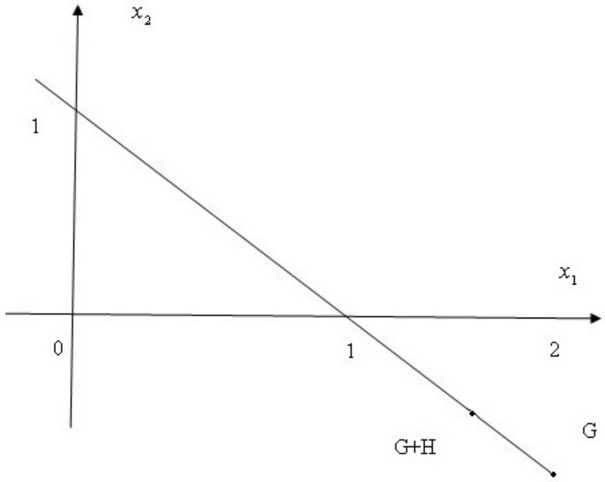

Рисунок 1.

Рассмотрим вопрос о существовании эффективных портфелей Марковица с неотрицательными компонентами.

Имеем систему неравенств

$\begin{cases} 2 - e_P/3 \geq 0 \\ -1 + e_P/3 \geq 0 \end{cases}$, откуда $3 \leq e_P \leq 6$. В этих пределах эффективности портфелей Марковица компоненты этих портфелей неотрицательны.

В общем случае:

Множество $\{e_P : \ X \geq 0\}$ *есть отрезок* $[a, b]$ *, может быть пустой.*

Пусть $V^{-1} \geq 0 \, , E \geq 0$ *, тогда множество* $\{e_P : \ X \geq 0\}$ *непусто.*

Найдем портфель Марковица эффективности $e_P = a/c$. Имеем $X(a/c) = G + Ha/c = \frac{bV^{-1}I - aV^{-1}E + (a/c)cV^{-1}E - (a/c)aV^{-1}I}{d} = \frac{(b-(a/c)a)V^{-1}I}{d} = \frac{(bc-a^2)V^{-1}I}{cd} = \frac{1}{c}V^{-1}I$. Дисперсия этого портфеля равна $\frac{1}{c}$.

Портфель минимального риска есть портфель Марковица эффективности $\frac{a}{c}$.

Найдем портфель Марковица эффективности $e_P = b/a$. Имеем $X\,(b/a) = G + Hb/a = \frac{bV^{-1}I - aV^{-1}E + (b/a)cV^{-1}E - (b/a)aV^{-1}I}{d} = \frac{(bc/a - a)V^{-1}E}{d} = = \frac{(bc-a^2)V^{-1}E}{ad} = \frac{1}{a}V^{-1}E$. Дисперсия этого портфеля равна $\frac{b}{a^2}$, что больше, чем $\frac{1}{c}$, ибо $d = bc - a^2 > 0$.

Оптимальный портфель Марковица. Наряду с задачей (1) рассмотрим оптимизационную задачу

$$X^T V X \to \min$$

$$E^T X \geq e_P, I^T X = 1.$$

Найти портфель минимального риска из всех портфелей эффективности, не менее заданной.

Оптимальным портфелем Марковица называется портфель минимального риска из всех портфелей эффективности, не менее заданной.

Портфель минимального риска. Это портфель, имеющий минимальный риск из всех портфелей. Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$X^T V X \to \min$$

$$I^T X = 1.$$

Функция Лагранжа в этом случае $L(X, s) = X^T V X + s(1 - I^T X)$. Имеем, $X = \frac{V^{-1}I}{I^T V^{-1} I}$. Итак, портфель минимального риска есть $X = \frac{V^{-1}I}{c}$, а сама минимальная дисперсия есть $X^T V X = (\frac{I^T V^{-1}}{c}) V (\frac{V^{-1}I}{c}) = \frac{I^T V^{-1} I}{c} = \frac{1}{c}$.

Таким образом, *обратная величина параметра c численно равна минимальной дисперсии всех портфелей.*

Отметим, что минимальная дисперсия и сам портфель минимального риска (дисперсии) определяются исключительно матрицей V (или V^{-1}), однако эффективность такого портфеля зависит и от вектора E.

Действительно, эффективность этого портфеля минимального риска есть $E^TX = \frac{E^TV^{-1}I}{c} = \frac{a}{c}$. Итак, эффективность портфеля минимального риска равна $\frac{a}{c}$.

Запишем дисперсию (ковариацию) доходности портфеля $v_P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i v_{ij} x_j$ так: $v_P = \sum_{i=1}^n x_i(\sum_{j=1}^n x_j v_{ij})$ и назовем величину $\sum_{j=1}^n x_j v_{ij}$ портфельной ковариацией доходности i-й ценной бумаги. Вектор-столбец с компонентами из портфельных ковариаций, то есть вектор VX, называется вектором портфельных ковариаций.

Характеристическое свойство портфеля минимального риска: портфель имеет минимальный риск, если и только если все портфельные ковариации в нем одинаковы.

Рынок, для которого $a \leq 0$, нельзя признать здоровым. В самом деле, так как $b = E^TV^{-1}E > 0$, то если $E \approx lI$ для некоторого положительного числа l, то $a = (E^TV^{-1}I)/l > 0$ в силу непрерывности. Другими словами, если доходности ценных бумаг примерно одинаковы, то $a \geq 0$. Также $a \geq 0$, если в матрице V^{-1} сумма элементов каждой строки неотрицательна, а $E \geq 0$.

С другой стороны, пусть в матрице V^{-1} есть строка, например, i-я, сумма элементов в которой отрицательна. Если теперь эффективность i-й бумаги значительно превосходит эффективности остальных бумаг, то $a = E^TV^{-1}I < 0$.

<u>Оптимальный портфель Тобина с операцией коротких продаж</u>. Ситуация становится проще и интереснее, если на рынке есть безрисковая ценная бумага. Исследования в этом направлении проводил Дж. Тобин. Предполагается, что доходность безрисковой бумаги является постоянной и тем более она не коррелированна с доходностью других – рисковых – бумаг, поэтому при наличии безрисковой бумаги в матрице ковариаций появляются сплошь нулевые строка и столбец, в силу чего рассуждения, приведенные выше, не проходят. Эффективность безрисковой бумаги обозначим e_0 и будем считать ее положительной.

<u>Эффективный портфель Тобина.</u> Пусть x_0 – доля безрисковой бумаги, тогда, сохраняя обозначения задачи (1), получаем оптимизационную задачу:

$$X^TVX \to \min \tag{7}$$

$$e_0x_0 + E^TX = e_P, x_0 + I^TX = 1.$$

(V - матрица ковариаций доходностей рисковых ценных бумаг). Решим эту задачу с помощью функции Лагранжа
$L(X, x_0, t, s) = X^TVX + t(e_P - e_0x_0 - E^TX) + s(1 - x_0 - I^TX)$. Имеем, $X^T = (\frac{t}{2})(E^T - e_0I^T)V^{-1}$.

При наличии на рынке безрисковой бумаги справедливо, что $E \neq e_0I$ (которое содержательно означает просто, что на рынке есть бумага, эффективность которой отлична от безрисковой, что безусловно справедливо. Это – еще одно подтверждение Аксиомы фондового рынка).

Выражение $(E - e_0I)^TV^{-1}(E - e_0I)$ можно обозначить S^2, считая $S > 0$.

Эффективным портфелем Тобина называется портфель минимального риска из всех портфелей заданной эффективности на рынке с безрисковой бумагой.

Особенность портфелей Тобина: структура рисковой части портфеля Тобина не зависит от задаваемой его эффективности. Действительно, эта структура задается вектором $V^{-1}(E - e_0I)$, который не зависит от e_P. Следовательно, все, чем можно варьировать при формировании портфеля Тобина, – это доля x_0 безрисковой бумаги: чем она больше, тем меньше эффективность портфеля и его риск.

Найдем риск эффективного портфеля Тобина, для чего найдем сначала его дисперсию, т.е. X^TVX. Имеем $X^TVX = \frac{(e_P-e_0)^2(E-e_0I)^TV^{-1}VV^{-1}(E-e_0I)}{S^2} = = \frac{(e_P-e_0)^2}{S^2}$. Следовательно, риск эффективного портфеля Тобина равен $r_P = \frac{|e_P-e_0|}{S}$. Отсюда можно найти зависимость эффективности этого портфеля от его риска

$$e_P = e_0 + Sr_P \text{ при } e_P \geq e_0 \tag{8}$$

Последнее условие является содержательно естественным.

Необходимость в операции коротких продаж возникает, если вектор $V^{-1}(E-e_0I)$ имеет отрицательную компоненту. Это определяется свойствами рынка. Если вектор $V^{-1}(E-e_0I)$ имеет отрицательную компоненту, то к операции коротких продаж придется прибегнуть вне зависимости от желания или нежелания участника рынка. Если же этот вектор неотрицателен, то необходимость в операции коротких продаж возникает, когда $I^TX > 1$. Или, подставляя в это соотношение оптимальное значение вектора рисковых долей $X = \frac{(e_P-e_0)V^{-1}(E-e_0I)}{S^2}$ и на основании формулы (8) получаем, что необходимость в операции коротких продаж возникает при $e_P > \frac{ce_0^2-2ae_0+b}{a-ce_0} + e_0$.

Оптимальный портфель Тобина. Решим оптимизационную задачу

$$X^TVX \to \min \tag{9}$$

$$e_0x_0 + E^TX \geq e_P, x_0 + I^TX = 1.$$

Оптимальное решение этой задачи – оптимальный портфель Тобина – минимального риска из всех портфелей эффективности, не менее заданной, на рынке с безрисковой бумагой.

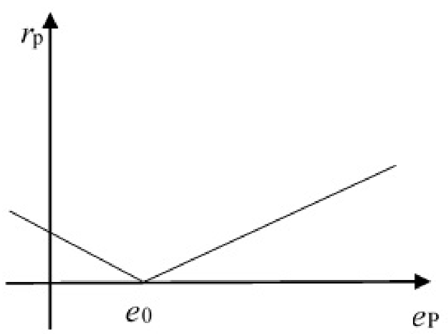

Рисунок 2.

На рис. 2 представлена зависимость риска эффективного портфеля Тобина от его эффективности. При $e_P \geq e_0$ решения задач (7) и (9) одинаковы, а при $e_P < e_0$ – разные, именно решение задачи (9) при всех $e_P < e_0$ есть одно-единственное решение задачи (7) при $e_P = e_0$. Легко понять, что при $e_P < e_0$ и формально, и содержательно нет смысла решать задачи (7) и (9) – достаточно составить портфель только из безрисковой бумаги.

Вопрос, может ли ценная рисковая бумага иметь эффективность, меньшую, чем безрисковая, достаточно сложен. Пусть, например, $E^T = (4,-2)$, $V = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Имеем $c = I^TV^{-1}I = 13$, $a = E^TV^{-1}I = 4$.

Пусть функция полезности вкладчика есть $\varphi(P) = e_P - v_P$, где e_P, v_P – эффективность и дисперсия портфеля P. Пусть P_1 – портфель, состоящий только из 1-й бумаги, тогда $e_1 = 4$, $v_1 = 5$, $\varphi_1 = -1$; P_2 – портфель, состоящий только из 2-й бумаги, тогда $e_2 = -2$, $v_2 = 2$, $\varphi_2 = -4$, и пусть P – портфель минимального риска, тогда $e_P = \frac{a}{c} = \frac{4}{13}$, $v_P = \frac{1}{13}$, $\varphi(P) = \frac{3}{13}$. Мы видим, что вкладчик выберет портфель P. Но если 2-ю бумагу удалить, то вкладчик окажется недовольным – он не сумеет сформировать столь полезный портфель, как ранее. Кстати, если добавить еще безрисковую бумагу эффективности, например, 0,1, то она окажется для данного вкладчика менее привлекательной, чем портфель P.

Портфели Марковица и Тобина максимальной эффективности с операцией коротких продаж. Здесь рассматриваются постановки задач, в каком-то смысле симметричные классическим постановкам Марковица и Тобина: максимизируется эффективность портфеля при ограничении риска.

<u>Портфель Марковица максимальной эффективности.</u> Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$E^T X \to \max \tag{10}$$
$$X^T V X = v_P, I^T X = 1.$$

Здесь v_P - задаваемая инвестором дисперсия формируемого портфеля.

Портфелем Марковица максимальной эффективности называется портфель максимальной эффективности из всех портфелей заданного риска.

Таким образом, задача (10) и есть задача формирования такого портфеля.

Задача (10) эквивалентна формально более общей задаче:

$$E^T X \to \max$$
$$X^T V X \le v_P, I^T X = 1,$$

то есть задаче построения портфеля Марковица максимальной эффективности из всех портфелей риска, <u>не</u> более заданного.

<u>Портфель Тобина максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного.</u> Наряду с задачей Тобина (9) рассмотрим оптимизационную задачу:

$$e_0 x_0 + E^T X \to \max \tag{11}$$
$$X^T V X \le v_P, x_0 + I^T X = 1.$$

Отметим, что V – матрица ковариаций доходностей рисковых ценных бумаг. Задача исследуется геометрически и из (8) найдено $e_P = e_0 + Sr_P$. Для этого e по формуле найден искомый портфель X.

Итак, эффективный и оптимальный портфель Тобина – это одно и то же. Поэтому задачу (11) можно решать с равенством дисперсии $X^T V X$ задаваемой дисперсии v_P. При такой постановке задачу можно решить с помощью функции Лагранжа $L(X, x_0, t, s) = (e_0 x_0 + E^T X) + t(v_P - X^T V X) + s(1 - x_0 - I^T X)$.

Получаем $X = \frac{r_P}{S} V^{-1}(E - e_0 I)$.

В оптимальном портфеле минимального риска или максимальной эффективности вектор портфельных ковариаций пропорционален вектору превышения эффективности ценных бумаг над безрисковыми вложениями (подразумевается, что последние на рынке есть).

Обратно, предположим, что для некоторого вектора рисковых долей X вектор портфельных ковариаций VX пропорционален вектору $E - e_0 I$. Этот вектор X оптимален.

<u>Портфели Марковица и Тобина без операции коротких продаж</u>. В этом случае приходится накладывать на переменные требование неотрицательности.

Задача Марковица (1) принимает вид:

$$X^T V X \to \min$$
$$E^T X = e_P, I^T X = 1, X \ge 0.$$

<u>Портфель минимального риска с неотрицательными компонентами.</u> Рассмотрим задачу

$$X^T V X \to \min$$
$$I^T X = 1, X \ge 0.$$

Найти минимум (точку минимума или хотя бы само минимальное значение) симметричной положительно определенной квадратичной формы на симплексе. Это важная задача математического программирования.

Посмотрим на эту задачу как на задачу фондового рынка. Ее решение дает портфель минимального риска из всех портфелей с неотрицательными компонентами. Очевидно, что если есть безрисковая бумага, то портфель, составленный только из нее, есть искомый. Если безрисковой бумаги нет, то матрицу V можно считать положительно определенной.

<u>Портфель минимального риска, заданной эффективности и с неотрицательными компонентами.</u> Решим оптимизационную задачу

$$X^T V X \to \min$$

$$E^T X = e_P, I^T X = 1, X \geq 0.$$

Это и есть классическая постановка Марковица об оптимальном портфеле. Необходимые и достаточные условия условного минимума:

$$2X^T V - tE^T - sI^T \geq 0, (2X^T V - tE^T - sI^T)X = 0, X \geq 0, E^T X = e_P, I^T X = 1. \qquad (12)$$

Решение этой системы уравнений и неравенств в общем случае затруднительно. При небольшом числе n эта система решается перебором.

Вместо рассмотренной задачи – найти портфель минимального риска заданной эффективности и с неотрицательными компонентами – надо решать более общую задачу: найти портфель минимального риска, эффективности не менее заданной и с неотрицательными компонентами,

$$X^T V X \to \min, \qquad (13)$$

$$E^T X \geq e_P, I^T X = 1, X \geq 0.$$

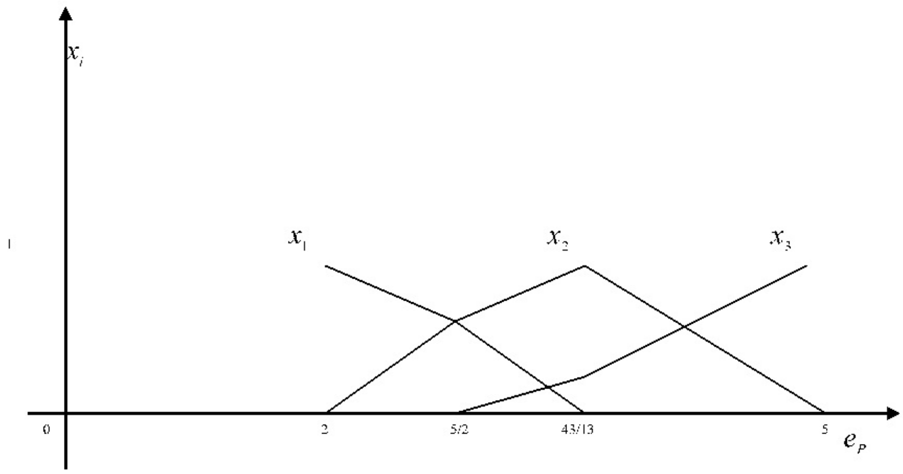

Рисунок 3.

Такая кусочно-линейная зависимость компонент оптимального портфеля Марковица при условии их неотрицательности имеет место в общем виде.

Содержательный смысл параметров рынка. Теперь содержательно охарактеризуем параметры фондового рынка a, b, c, d введенные выше.

Вернемся к оптимизационной задаче:

$$X^T V X \to \min$$

$$I^T X = 1.$$

Решение задачи дает портфель минимального риска. Портфель минимального риска есть $X = \frac{V^{-1}I}{c}$, а сама минимальная дисперсия есть $X^T V X = (\frac{I^T V^{-1}}{c}) V (\frac{V^{-1}I}{c}) = \frac{I^T V^{-1} I}{c} = \frac{1}{c}$.

Таким образом, *величина параметра c равна обратной величине минимальной дисперсии всех портфелей.*

Отметим, что минимальная дисперсия и сам портфель минимального риска (дисперсии) определяются исключительно матрицей V (или V^{-1}), однако эффективность такого портфеля зависит и от вектора E.

Действительно, эффективность этого портфеля минимального риска есть $E^T X = \frac{E^T V^{-1} I}{c} = \frac{a}{c}$. Итак, эффективность портфеля минимального риска равна $\frac{a}{c}$, то есть в a раз больше величины его дисперсии. Таким образом, параметры a, c связаны с портфелем минимального риска.

Для того, чтобы раскрыть содержательный смысл параметра b, напомним, что уравнение линейной регрессии случайной величины Y на случайную величину X есть $\varphi(x) = g + fx$, где $f = K_{XY}/D_X$, $g = M[Y] - (K_{XY}/D_X)M[X]$; $M[X]$, $M[Y]$ –

математические ожидания X, Y, а D_X, K_{XY} – дисперсия X и корреляционный момент (или ковариация) X, Y. Напомним также, что f называется коэффициентом, а g – константой линейной регрессии. В теории фондового рынка D_X, K_{XY} есть, соответственно, вариация v_X с.в. X и (совместная) ковариация v_{XY} с.в. X, Y. Если X, Y есть пакеты ценных бумаг, то $v_X = XVX$, а $v_{XY} = X^T VY$.

Напомним, что предполагается отсутствие на рынке безрисковой бумаги.

Вариация пакета $V^{-1}E$ *равна параметру рынка* b.

Найдем линейную регрессию произвольного пакета Y на пакет $V^{-1}E$.

Ковариация произвольного пакета Y *и пакета* $V^{-1}E$ *равна эффективности пакета* Y.

Действительно, $Cov(Y, V^{-1}E) = Y^T VV^{-1}E = Y^T E = e_Y$.

С учетом сказанного получаем $f = e_Y/b$. Отсюда $e_Y = bf$, так что имеем

Эффективность любого пакета пропорциональна коэффициенту f *его линейной регрессии на пакет* $V^{-1}E$.

Отметим, что константа линейной регрессии любого пакета на пакет $V^{-1}E$ равна 0.

Следовательно, эффективность пакета $V^{-1}E$ равна параметру рынка b, так как коэффициент f линейной регрессии пакета $V^{-1}E$ на себя равен 1. С учетом предложения 1 получаем окончательно:

Параметр рынка b *равен эффективности и вариации пакета* $V^{-1}E$.

Для дополнительной информации о содержательном смысле параметра b решим оптимизационную задачу

$$Y^T VY \to \min$$

$$E^T Y = p_K.$$

Решение этой задачи есть пакет минимального риска из всех, дающих заданный доход p_K.

Для решения задачи составим функцию Лагранжа: $L(Y, t) = Y^T VY + t(p_K - E^T Y)$.

Имеем $\frac{\partial L}{\partial X} = 2Y^T V - tE^T = 0$, откуда $Y = \frac{tV^{-1}E}{2}$. Подставляя в равенство $E^T Y = p_k$, найдем $t = \frac{2p_K}{E^T V^{-1}E}$, значит, $Y = \frac{p_{K_k} V^{-1}E}{E^T V^{-1}E} = \frac{p_K V^{-1}E}{b}$, а сама минимальная дисперсия есть $Y^T VY = (\frac{p_K E^T V^{-1}}{b}) V (\frac{p_K V^{-1}E}{b}) = \frac{p_K^2 E^T V^{-1}E}{b^2} = \frac{p_K^2}{b}$, минимальный риск есть $r_K = \frac{|p_K|}{\sqrt{b}}$. Полагая $p_K = 1$, получаем следующий вывод:

$\frac{1}{b}$ *есть минимальная дисперсия пакета, обеспечивающего доход в одну денежную единицу.*

Собственный капитал такого пакета есть $\frac{I^T V^{-1}E}{b} = \frac{a}{b}$. Напомним, что $b > 0$. Получаем следующий вывод: *пакет минимального риска, дающий положительный доход, является спекулятивным, если и только если* $a \le 0$. Таким образом, знак параметра a несет важнейшую информацию. Если $a > 0$, то пакет минимального риска, дающий положительный доход, не может быть спекулятивным, следовательно, на таком рынке теория пакетов минимального риска по сути сводится к теории портфелей минимального риска.

Любой пакет минимального риска пропорционален пакету $V^{-1}E$.

Эффективность пакета $\alpha V^{-1}E$ равна $E^T(\alpha V^{-1}E) = \alpha b$, а его дисперсия равна $\alpha V^{-1}E)^T V(\alpha V^{-1}E) = \alpha^2 b$. Следовательно, пакет X минимального риска имеет вид $(e_X V^{-1}E)/b$ и его риск равен $e_X/\sqrt{b}$.

Опишем еще одно свойство портфеля минимального риска.

Найдем ковариацию каких-нибудь двух портфелей Марковица. Пусть портфель X имеет эффективность e_X, а другой портфель M имеет эффективность m, тогда, согласно формуле (3), $X = G + He_X$, $M = G + Hm$ и ковариация этих портфелей есть

$$Cov(X, Y) = X^T VM = (G + He_X)^T V(G + Hm) = (b - am - ae_X + cme_X)/d.$$

Пусть портфель M есть портфель минимального риска, тогда его эффективность $m = a/c$, а дисперсия $1/c$. Но в этом случае имеем $X^T VM = 1/c$, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Ковариация с портфелем минимального риска любого портфеля Марковица не зависит от последнего и равна $1/c$ – минимально возможной дисперсии портфелей, а коэффициент линейной регрессии равен 1.

Содержательный смысл этого утверждения неясен.

Предположим теперь, что на рынке есть безрисковая бумага. Тогда роль пакета $V^{-1}E$ начинает играть пакет $V^{-1}(E-e_0I)$.

Ковариация произвольного портфеля X и пакета $V^{-1}(E-e_0I)$ равна превышению эффективности портфеля X над эффективностью безрисковой бумаги.

Действительно, $Cov(X,V^{-1}(E-e_0I) = X^TVV^{-1}(E-e_0I) = X^T(E-e_0I) = e_X-e_0$.

Портфель X не коррелирован с пакетом $V^{-1}(E-e_0I)$, если и только если его эффективность равна эффективности безрисковой бумаги.

Напомним, что эффективный портфель Тобина M эффективности m имеет вид $(m-e_0)V^{-1}(E-e_0I)/S^2$, где $S^2=(E-e_0I)^TV^{-1}(E-e_0I)$. Найдем ковариацию какого-нибудь портфеля X эффективности e_X на портфель Тобина M. Имеем $Cov(X,M)=(e_X-e_0)(m-e_o)/S^2$. Так как дисперсия портфеля M равна $(m-e_0)^2/S^2$, то коэффициент линейной регрессии произвольного портфеля X на портфель Тобина M равен $f_{XM}=((e_X-e_0)/S^2)/((m-e_0)/S^2)=(e_X-e_0)/(m-e_0)$. Или $e_X-e_0=f_{XM}(m-e_0)$. В частности, как легко проверить, для портфеля, состоящего из одной i-й бумаги, имеем $e_i-e_0=f_{iM}(m-e_0)$.

Рыночный портфель есть портфель M, в котором m_i есть доля стоимости i-й бумаги в стоимости бумаг всего рынка. Пусть на рынке есть безрисковая бумага. В состоянии равновесия рыночный портфель есть оптимальный портфель Тобина эффективности $m=E^TM$. Для произвольного портфеля его коэффициент линейной регрессии на рыночный портфель имеет специальное обозначение β. Следовательно, для произвольного портфеля X можно записать $e_X-e_0=\beta_X(m-e_0)$. Это и есть хорошо известная связь между β вклада и его эффективностью.

Методы построения множества эффективных портфелей. Пусть e, r обозначает соответственно эффективность и риск портфеля (риск отождествляется со средним квадратическим отклонением σ доходности портфеля). Определим отношение доминирования среди портфелей, именно считаем, что портфель P_1 доминирует (превосходит) портфель P_2 если $e_1 \geq e_2$, $r_1 \leq r_2$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое (чтобы исключить возможность доминирования портфеля самого себя). Портфель назовем недоминируемым, если не существует портфеля, который бы его доминировал. В [14] такой портфель называется эффективным, если он недоминируемый. Эффективные портфели [14] делятся на две группы: к одной принадлежат портфели наименьшего риска при заданной эффективности, а к другой – портфели наибольшей эффективности при заданном риске. Наша терминология в данной статье отличается богатством и возможностями применений.

Интерес представляет также получение в явном виде компонент эффективного портфеля Тобина через связь доходностей рисковых бумаг с ведущим фактором рынка, за который взята средняя доходность бумаг рынка. Воспроизведем этот вывод здесь, придерживаясь, однако, наших терминологии и обозначений.

Сначала замечаем, что портфель C, для которого коэффициент наклона $\frac{e_C-e_0}{\sigma}$ имеет максимальное среди всех портфелей значение, является оптимальным (фактически, в [14] это определение оптимального портфеля). Оптимальный портфель находится именно как таковой. Составим функцию Лагранжа $L(X,s)=\frac{E^TX-e_0}{\sqrt{X^TVX}}+s(1-I^TX)$. Далее имеем

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{E^T(X^TVX)^{1/2}-(E^TX-e_0)[\frac{1}{2}(X^TVX)^{-1/2}\,2X^TV]}{X^TVX}-sI^T=0, \qquad (14)$$

$$\frac{E^T(X^TVX)^{1/2}-(X^TVX)^{-1/2}X^TV(E^T-e_0)X}{X^TVX}=sI^T.$$

Умножим обе части последнего равенства на X, и учитывая, что $I^T X = 1$, получим $s = e_0/(X^T V X)^{1/2}$. Найденное s подставим в (14) и получим

$$E^T - e_0 = X^T V \frac{E_X - e_0}{(X^T V X)}.$$

Обозначая константу $\frac{E_X - e_0}{(X^T V X)}$ через a и aX через Y, получаем систему линейных уравнений

$VY = (E^T - e_0)$ (напомним, что e_0 -эффективность безрисковых вложений, а $E_X = E^T X$ - эффективность (неизвестная!) искомого портфеля). Осталось выразить Y через беты бумаг и дисперсию σ_M^2.

Воспользовавшись формулами, приведенными выше, получим $y_k d_k + \sum_{i=1}^n y_i \beta_i \beta_k \sigma_M^2 = e_k - e_0$, отсюда $y_k = \frac{e_k - e_0}{d_k} - \beta_k \frac{\sigma_M^2}{d_k} \sum_{i=1}^n y_i \beta_i$ Для того, чтобы все-таки найти y_k умножим каждое уравнение на β_k и затем сложим все эти уравнения. Получим

$$\sum_{k=1}^n y_k \beta_k = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k (e_k - e_0)}{d_k} - \sigma_M^2 (\sum_{i=1}^n y_i \beta_i) \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2}{d_k}, \tag{15}$$

откуда и находим $\sum_{k=1}^n y_k \beta_k = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i (e_i - e_0)}{d_i}}{1 + \sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{d_i}}$. Подставляя это выражение в (15),

получаем $y_k = \frac{\beta_k}{d_k} (\frac{e_k - e_0}{\beta_k} - A)$, где $A = \frac{\sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i (e_i - e_0)}{d_i}}{1 + \sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{d_i}}$.

Интересна роль A. Если предположить, что $\beta_i > 0$ для всех $i = 1, ..., n$, то при составлении оптимального портфеля i-я ценная бумага должна быть куплена, если $\frac{e_i - e_0}{\beta_i} > A$, а если $\frac{e_i - e_0}{\beta_i} < A$, то с этой бумагой должна быть совершена операция коротких продаж.

Вторая часть данной статьи посвящена обобщенной теории двойственности.

2 Анализ чувствительности в портфельном инвестировании

Классическая минимаксная задача общего вида выглядит следующим образом [16]:

$$\max_{Y \in G} F(X, Y) \to \min_{X \in \Omega}, \tag{1}$$

где Ω - выпуклое замкнутое множество в E_n, а G – ограниченное замкнутое множество в E_m. В зависимости от того, будет ли $\Omega \neq E_n$ или $\Omega = E_n$, говорят о минимаксной задаче с ограничениями или без них. Переменная X называется параметром.

Основные идеи, которые могут быть использованы для решения минимаксных задач.

1. *Поиск экстремального базиса.* Задача принадлежит П.Л. Чебышеву. В настоящее время она наиболее полно разработана для одномерных задач аппроксимации.

Пусть функция $F(X, Y)$ выпукла по X на Ω на каждом фиксированном $Y \in G$. Тогда на G можно найти r точек $Y_1 \ldots, Y_r$, где $1 \leq r \leq n+1$, таких, что исходная минимаксная задача (1) равносильна следующей задаче:

$$\max_{Y \in G_r} F(X, Y) \to \min_{X \in \Omega}, \tag{2}$$

где $G_r = \{Y_1, \ldots, Y_r\}$. Множество G_r называется экстремальным базисом. Если экстремальный базис известен, то, решая обычно простую задачу (2), получают решение и исходной задачи (1).

2. *Минимизация функции максимума.* Задача получила существенное развитие благодаря установлению при некоторых предположениях дифференцируемости функции максимума по всем возможным направлениям.

Положим

$$\varphi(X) = \max_{Y \in G} F(X, Y).$$

Тогда исходная задача (1) равносильна задаче минимизации функции $\varphi(X)$ на Ω.

3. *Нахождение седловой точки.* Задача связана с именем Дж. Фон Неймана. Она используется для решения задач теории игр на основе важной части исследования операций – двойственности.

Точка $[X^*, Y^*]$ называется седловой точкой функции $F(X,\ Y)$ на множестве $\Omega \times G$, если $F(X^*, Y) \leq F(X^*, Y^*) \leq F(X, Y^*)$ для всех $X \in G$ и $Y \in G$. Допустив, что у функции $F(X, Y)$ существует седловая точка $[X^*, Y^*]$ на $\Omega \times G$, будем иметь

$$\min_{X \in \Omega} \max_{Y \in G} F(X, Y) = F(X^*, Y^*) = \max_{Y \in G} \min_{X \in \Omega} F(X, Y).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае минимаксная задача (1), а также двойственная к ней задача $\min\limits_{X \in \Omega} F(X, Y) \to \max\limits_{Y \in G}$ сводятся к задаче об отыскании седловой точки.

Симметричная пара двойственных задач имеет важные практические приложения. Так, экономически – содержательная задача торга приводит к симметричной паре взаимно-двойственных задач:

$$\begin{array}{cc} P(X) = CX \to \max & S(Y) = YB \to \min \\ AX \leq B,\ X \geq 0 & YA \geq C,\ Y \geq 0. \end{array}$$

Вместе с этим рассмотрим антагонистическую игру двух лиц с матрицей A. Из теории игр известно, что если к элементам матрицы A прибавить одно и то же число d, то оптимальные стратегии P^*, Q^* в игре A останутся оптимальными и в игре $A' = A + d$, а цена игры увеличится на d. Таким путем можно добиться того, что все элементы матрицы A' можно считать положительными и цену игры ν' также можно считать положительной. При этом возникает симметричная пара двойственных задач линейного программирования

$$\begin{array}{ll} \nu_1 \to \ \max, & \nu_2 \to \ min, \\ E\,(P, j) \geq \nu_1, \quad j = 1, ..., n, & E\,(i, Q) \leq \nu_2, \quad i = 1, ..., m, \\ \sum\limits_i p_i = 1, \quad p_i \geq 0, & \sum\limits_j q_j = 1, \quad q_j \geq 0. \end{array} \tag{3}$$

После введения новых переменных (в левой задаче $x_i = \frac{p_i}{\nu_1}$; в правой задаче $y_j = \frac{q_j}{\nu_2}$) эти задачи переформатируются очевидным образом.

Получается симметричная пара двух двойственных стандартных задач линейного программирования:

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_j x_j \to \min, & \sum\limits_i y_i \to \max, \\ \sum\limits_j a_{ij} x_j \geq 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n, & \sum\limits_i a_{ij} y_i \leq 1, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m. \end{array} \tag{4}$$

Указанная замена переменных и добавление к элементам матрицы A одного и того же числа произведены для получения именно такой пары двойственных задач, позволяющих затем воспользоваться теоремами двойственности.

Далее используем теорию линейного программирования и теоремы двойственности. Из них следует, что оптимальные значения целевых функций $\sum\limits_j x_j^*$ и $\sum\limits_i y_i^*$ равны. Это позволяет ввести величину $\nu^* = \frac{1}{\sum\limits_j x_j^*} = \frac{1}{\sum\limits_i y_i^*}$, которая оказывается ценой игры, и, вернувшись к прежним переменным, получить оптимальные стратегии игроков $p_j^* = x_j^* \cdot \nu^*$, $q_i^* = y_i^* \cdot \nu^*$.

Из теории двойственности также следует, что решая симплексным методом одну из задач, можем из последней симплексной таблицы найти и оптимальное решение другой задачи.

Приведем некоторые обобщения теории двойственности.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &p \to \min, \\ &a(x) \le p,\ a \in P. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $A = \cup\{dom\ a : a \in P\}$. Положим $f(x) = \sup\{a(x) : a \in P\}$ для всякого $x \in A$. Назовем f верхней огибающей семейства функций P и обозначим $\vee P$.

Теорема 1. *Задача* (5) *эквивалентна задаче (5´).* Найти

$$\inf f = \inf \vee P. \tag{5´}$$

Эта задача (5´) называется задачей нахождения минимакса системы P.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &q \to \max, \\ &b(y) \ge q,\ b \in Q. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $B = \cup\{dom\ b : b \in Q\}$. Положим $s(x) = \inf\{b(y) :\ b \in Q\}$ для всякого $y \in B$. Назовем s нижней огибающей семейства функций Q и обозначим $\wedge Q$.

Теорема 2. *Задача* (6) *эквивалентна задаче (6´).*

Найти

$$\sup s = \sup \wedge Q. \tag{6´}$$

Эта задача (6´) называется задачей нахождения максимина системы Q.

Теорема 3. *Обе задачи* (5), (6) *имеют единственное решение.*

Два других типа задач принятия решений в условиях неопределенности

$$\begin{aligned} &p \to \min, \\ &a(x) \ge p,\ a \in P. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 4. *Задача* (7) *эквивалентна задаче (7´).* Найти

$$\inf s = \inf(\sup \wedge Q). \tag{7´}$$

$$\begin{aligned} &q \to \max, \\ &b(y) \le q,\ b \in Q. \end{aligned} \tag{8}$$

Теорема 5. Задача (8) *эквивалентна задаче (8´).* Найти

$$\max\ f\ = \max(\inf \vee P), \tag{8´}$$

они отличаются неоднозначностью понимания.

Теорема 6. *Если $\bar{s}$ – решение задачи* (7)*, то любое $\bar{\bar{s}} > \bar{s}$ также есть решение задачи (7´).*

Аналогично верно и для задачи (8).

Если $P = Q$, то задачи (5´) и (6´) назовем обобщенно двойственными. Обозначим $P = Q$ в этом случае $\sum$. Итак, в этом случае обе задачи таковы: $\inf \vee E$, $\sup \wedge E$.

Здесь E – семейство функций $domE = \cup\{dom\ e :\ e \in E\}$ – объединение областей определения функций E. Для всякого $x \in dom\,E$ положим $f(x) = \inf\{e(x) :\ e \in E\}$, $g(x)\ = \sup\{e(x)\ :\ e \in E\}$, назовем f нижней огибающей семейства функций E и обозначим $\wedge E$, а g – верхней огибающей и обозначим $\vee E$.

Теорема 7. *Для всякого $x \in dom\ E$ выполняется $f(x) \le g(x)$.*

Действительно, $(x \in dom\ E) \Rightarrow (\exists e \in E :\ x \in dom\ e) \Rightarrow [f(x) \le e(x) \le g(x)]$.

Это известно, например, в виде утверждения о том, что нижняя цена матрицы (игры) не превосходит верхней цены матрицы (игры).

Задача 1. $f(x) \to \max$ или $\max(\wedge E)$, то есть: найти $\max$ нижней огибающей семейства функций, называется (несколько неточно) нахождением максимина семейства функций. Аналогично

Задача 2. $g(x) \to \min$ или $\min(\vee E)$, то есть: найти $\min$ верхней огибающей семейства функций называется (тоже несколько неточно) нахождением минимакса семейства функций.

Задача выявления условий на семейство функций E, при которых совпадают максимин и минимакс, называется задачей о совпадении максимина и минимакса. Некоторые утверждения на этот счет известны. Например, примером является теорема Дж. фон Неймана о таком совпадении для множества смешанных стратегий игроков в матричной игре, что и послужило основанием введения цены игры.

Остановимся на технике использования минимакса в теории двойственности.

Предположим, что эффективность n-й ценной бумаги e известна в каждом следующем временном периоде с точностью до некоторого множества неопределенности Ω_n. Пусть $a_n = \min \Omega_n$, $b_n = \max \Omega_n$. При формировании портфеля ценных бумаг X на следующий период положим $R_k = e - E^T X$ $\left(E^T X = \sum\limits_k e_k x_k \right)$; если $e_k = \max\limits_i e_i$, то весь портфель должен состоять только из k-й бумаги, и $R_k(X)$ есть риск потерять именно такую сумму, если вместо одной k-й бумаги будет сформирован портфель X.

Очевидно, что наименее благоприятному варианту формирования портфеля, при котором риск максимален, отвечают граничные значения $e_k^* = b_k$, $e_i^* = a_i \quad \forall i \neq k$. При этом $R_k^* = (1 - x_k)b_k - \sum\limits_{i \neq k} x_i a_i$.

Не склонный к риску инвестор, желающий обеспечить себе твердый доход, сформирует портфель, минимизирующий наибольший из вышеуказанных рисков, то есть будет решать задачу: $\max\limits_k ((1 - x_k)b_k - \sum\limits_{i \neq k} x_i a_i) : \ I^T X = 1, \ X \geq 0) \underset{X}{\rightarrow} \min$.

Она сводится к задаче линейного программирования путем введения новой переменной θ. Рассмотрим задачу:

$$\begin{array}{l} \theta \rightarrow \min, \\ (1 - x_k)b_k - \sum\limits_{i \neq k} x_i a_i \leq \theta \ \ k = 1, ..., n, \\ I^T X = 1, \ \ X \geq 0. \end{array}$$

Оптимальное решение такой задачи дает гарантированный результат, то есть независимо от развития событий величина упущенной выгоды заведомо не превысит некоторого вычислимого числа θ_{min}.

Минимаксный подход выглядит так: сначала для всякого портфеля находим величину

$$\varphi(X) = \max_k \left((1 - x_k)\, b_k = \sum_{i \neq k} x_i a_i, \quad k = 1, ..., m \right) =$$

$$= \max_{i \neq j} \left(\left(\sum_{i \neq k} x_i \right) b_k - \sum_{i \neq k} x_i a_i \right) = \max_k \left(\sum_{i \neq k} x_i \left[b_k - a_i \right] \right),$$

а затем формируем портфель с наименьшим значением этой величины, то есть это именно минимаксный подход

$$\max_k ((1 - x_k)b_k - \sum_{i \neq k} x_i a_i) : \quad I^T X = 1, \quad X \geq 0) \underset{X}{\rightarrow} \min$$

С точки зрения двойственности приходим к следующей задаче:

$$\begin{array}{ll} \theta_2 \rightarrow \min, & \\ \sum\limits_{i \neq k} x_i (b_k - a_i) \leq \theta_2, & k = 1, ..., n, \\ I^T X = 1, \ \ X \geq 0. & \end{array}$$

Теперь видно, что это задача второго игрока в матричной игре с матрицей $A = (a_{ij})$, элементы которой a_{ij} можно записать так $a_{ij} = (b_i - a_j)\, \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$ –

символ Кронекера. Матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 - a_2 & b_1 - a_3 & .... & b_1 - a_n \\ b_2 - a_1 & 0 & b_2 - a_3 & .... & b_2 - a_n \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ b_n - a_1 & b_n - a_2 & b_n - a_3 & .... & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача первого игрока в этой матричной игре

$$\begin{array}{ll} \theta_1 \to \max, & \\ \sum\limits_{j \neq k} (b_j - a_k)\, y_j \geq \theta_1 \ , & k = 1, ..., n, \\ I^T Y = 1, \ Y \geq 0. & \end{array}.$$

Или, иначе

$$\min_k \left(\sum_{j \neq k} y_j b_j - (1 - y_k)\, a_k : \ \ I^T Y = 1, \ \ Y \geq 0 \right) \underset{Y}{\to} \max .$$

То есть первый игрок формирует портфель, максимизирующий наименьший выигрыш. Оптимальное решение этой задачи дает гарантированный результат, независимо от развития событий величина выигрыша заведомо не меньше θ^1_{max} . Разумеется, все выводы теории матричных игр здесь приложимы: $\theta^2_{min} = \theta^1_{max}$. В частности, так же, как и выше, можно получить симметричную пару двойственных задач.

Предложеные элементы обобщенной теории двойственности имеют как теоретические, так и практические применния.

В заключение сообщим, что основные положения данной статьи доложены на научных семинарах: МГУ им.М.В. Ломоносова, кафедра Математических методов анализа экономики ("*Динамические модели экономики*" проф. Черемных Ю.Н., "*Инвестиционное проектирование*" проф. Грачева М.В., "*Макроэкономические исследования*" доц. Шагас Н.Л.); СПбГУ, Факультет Прикладной математики – процессов управления ("П*рикладные задачи теории управления*" проф. Ногин В.Д.); Государственый университет управления ("*Экономическая кибернетика*" проф. Капитоненко В.В.), МГУ им.М.В. Ломоносова, факультет ВМиК ("*Теория игр в экономике*" доц. Морозов В.В.). А также результаты частично анонсированы в публикациях [19-30].

Список литературы

1 Bachelier L. Theories de la Speculation [Ph. D. thesis in mathematics], Annales Scientifiques del Ӗcole Normale Superiure, -V. III-17. -P. 21-86.

2 Markowitz H.M. Portfolio Selection // Journal of Finance. -1952. -V. 7. -No. 1. -P. 77-91.

3 Kelly J.L. A new Interpretation of Information Rate // Bell System Technical Journal. -1956. -Vol.35. -No.4. -P.917-926.

4 Tobin J. The Theory of Portfolio Selection in F.H.Hahn and F.R.P. Brechling (eds), The Theory of Interest Rate. London: Macmillan. -1965. -P.3-51.

5 Black F. and Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // J. Polit. Econ. -1973. -V. 81. -P. 637-654.

6 Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. -М.: Фазис, 1998. – 512 с. – (Стохастика, вып. 2)

7 Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. -М.: Фазис, 1998. – 544 с. – (Стохастика, вып. 3)

8 Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.

9 Areerak T. Mathematical Model of Stock Prices via a Fractional Brownian Motion with Adaptive Parameters // Applied Mathematics – 2014. doi.org/10.1155/2014/791418. – URL ttps://www.hindawi.com/journals/isrn/2014/791418/

10 Mangram M.E. A Simplified perspective of the Markowitz Portfolio Theory // Global Journal of Business Research – 2013. – V. 7. No.7. – P. 59-60.

11 London A., Gera I., Bŕanhelyi B. Markowitz Portfolio Selection Using Various Estimators of Expected Returns and Filtering Techniques for Correlation Matrices // Acta Polytechnica Hungarica – 2018. – V. 15. No.1. – P. 217-229.
12 Aldridge I. Big Data in Portfolio Allocation: A New Approach to Successful Portfolio Optimization New York, NY. http://irenealdridge.com/ia/category/big-data/, id 3142880.
13 Chen C., Iyengar G., Moallemi C.C. An Axiomatic Approach To Systemic Risk // Management Science – 2011. doi: 10.2307/23443854.
14 Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. -М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 1999. – 144 с.
15 Шведов А.С. Процентные финансовые инструменты: оценка и хеджирование. -М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 152 с.
16 Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. -М.:Наука, 1972. -368с
17 Simi F.A., Talukder Md.Sh. A New Approach for Solving Linear Fractional Programming Problems with Duality Concept // Open Journal of Optimization – 2017. V. 6. – P. 1-10. http://www.scirp.org/journal/ojop.
18 Nasseri S.H., Ebrahimneja A. A New Approach to Duality in Fuzzy Linear Programming // In book: Fuzzy Engineering and Operation Research – 2012. doi: 10.1007/978-3-642-28592-9 _2.
19 Малыхин В.И. Оптимальные портфели и пакеты ценных бумаг. – М.: ГУУ, 2002. – 36 с.
20 Малыхин В.И. Модель роста капитала с гарантией неразорения // Экономика и математические методы. -2004. -Т. 40. -№4. -С.134-136.
21 Малыхин В.И., Нуртазина К.Б. Исследование параметров фондового рынка // Синергетические идеи в образовании – Астрахань: Изд-во АИПКП, 2006. – С. 52-57.
22 Нуртазина К.Б., Малыхин В.И. Содержательный смысл параметров фондового рынка // Вестник университета. – М.: ГУУ, 2011. -№1. – С. 272-285.
23 Malykhin V.I., Nurtazina K.B. The Mathematical Theory of the Stock market // Lap-publishing company. DBR. -2012.
24 Нуртазина К.Б. Формирование портфеля ценных бумаг в условиях неопределенности // Вестник МГУ. Серия 6: Экономика. -2008. №5. – С.64-74.
25 Нуртазина К.Б. Управленческие решения в условиях неопределенности // Вестник университета. – М.: ГУУ, 2010. №20. – 0,7 п.л.
26 Нуртазина К.Б. Модифицированная схема принятия решений в условиях неопределенности и двойственность // Вестник университета. – М.: ГУУ, 2010. №24. – С. 429-436.
27 Нуртазина К.Б. Некоторые особенности обобщенной теории двойственности // Современные проблемы анализа и преподавания математики: Материалы Международной научной конференции, посвященной 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского 17-19 мая 2010 г. / М.: МГУ имени М.В.Ломоносова, 2010. – С. 113-114.
28 Нуртазина К.Б. Оптимизация портфеля ценных бумаг и управление в условиях неопределенности [Текст]: Монография / К.Б. Нуртазина, Государственный университет управления. – М.: ГУУ, 2011. – 197 с.
29 Нуртазина К.Б. Анализ чувствительности в портфельном инвестировании // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спец. выпуск. -2011. –С. 45-47.
30 Нуртазина К.Б. Новый показатель эффективности направлений предпринимательской деятельности // Вестник университета. – М.: ГУУ, 2011. №5. – С. 353-359.
31 Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2002.
32 Малыхин В.И. Социально-экономическая структура общества: Учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 175 с.
33 Малыхин В.И. Математическое моделирование социально-экономической структуры общества: 2- изд. М.:ЛЕНАНД, 2015. – 240 с.
34 Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2015. – 232 с.
35 Малыхин В.И. Экономико-математическое моделирование налогообложения: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2006. – 103 с.

В.И.Малыхин [1] , Қ.Б.Нұртазина [2]

[1] *Мемлекеттік басқару университеті, Мәскеу, Ресей*

[2] *Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан*

Айқынсыздық жағдайдағы инвестициялық процесстерді математикалық талдау

Аннотация. Бағалы қағаздар нарығын зерттеуге және тиімді бағалы қағаздар портфелін бағалауға аксиоматикалық көзқарас ұсынылады. Зерттелген үш қор нарығының параметрлері үшін мағыналы түсіндіру табылды. Қаржылық инвестициялық моделді зерттеу кезінде оңтайлы шешім моделді қалыптастыру кезіндегі шарттармен анықталады. Нақты өмірде бұл жағдайлар өзгереді. Бастапқы моделдің параметрлерін өзгерту оңтайлы шешімді өзгертуді бағалауды талап етеді. Біз минимакс принципі мен қосалқылық теорияға негізделген сезімталдықты талдау әдістерін қарастырамыз, ол экономикалық қосымшалар тұрғысынан маңызды болып табылады.

Түйін сөздер қор нарығының параметрлері, портфелдің тиімділігі, минималды тәуекел портфелі, максималды тиімді портфелі, қысқа сауда, минимакс, қосалқылық.

V.I.Malykhin [1], K.B.Nurtazina [2]

[1] *State University of Management, Moscow, Russia*
[2] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

Mathematical Analysis of Investment Processes in Uncertainty

Abstract:. An axiomatic approach to stock market research and an assessment of the effective securities portfolio are proposed. A meaningful interpretation was found for the studied three parameters of the stock market. When examining a financial investment model, the optimal solution is determined by the conditions at the time of the model formation. In real life, these conditions are changeable. Changing the parameters of the original model requires an assessment of the change in the optimal solution. We consider methods of sensitivity analysis based on the principle of minimax and the duality theory, which is important in the sense of economic applications, associated with it.

Keywords: stock market parameters, portfolio efficiency, minimal risk portfolio, maximal efficiency portfolio, short sale operation, minimax, duality.

References

1 Bachelier L. Theories de la Speculation [Ph. D. thesis in mathematics], Annales Scientifiques del Ecole Normale Superiure, V. III-17, P. 21-86.
2 Markowitz H.M. Portfolio Selection, Journal of Finance, 7(1), 77-91(1952).
3 Kelly J.L. A new Interpretation of Information Rate, Bell System Technical Journal, 35(4), 917-926(1956).
4 Tobin J. The Theory of Portfolio Selection in F.H.Hahn and F.R.P. Brechling (eds), The Theory of Interest Rate. London: Macmillan. 1965. P.3-51.
5 Black F. and Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, J. Polit. Econ., 81, 637-654(1973).
6 Shiryaev A.N. Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki. Fakty. Modeli [Foundation of stochastic financial mathematics. Data. Models], Fazis [Phase, Moscow, (2) 1988] [in Russian]
7 Shiryaev A.N. Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki. Teoriya [Foundation of stochastic financial mathematics. Data. Models], Fazis [Phase, Moscow, (3) 1998]. [in Russian]
8 Mel'nikov A.V., Volkov S.N., Nechayev M.L. Matematika finansovykh obyazatel'stv [Mathematics of financial o bligations] (State University Higher School of Economics, 2001) [in Russian].
9 Areerak T. Mathematical Model of Stock Prices via a Fractional Brownian Motion with Adaptive Parameters, Applied Mathematics. 2014. doi.org/10.1155/2014/791418. URL ttps://www.hindawi.com/journals/isrn/2014/791418/
10 Mangram M.E. A Simplified perspective of the Markowitz Portfolio Theory, Global Journal of Business Research, 7(7), 59-60(2013).
11 London A., Gera I., Banhelyi B. Markowitz Portfolio Selection Using Various Estimators of Expected Returns and Filtering Techniques for Correlation Matrices, Acta Polytechnica Hungarica, 15(1), 217-229(2018).
12 Aldridge I. Big Data in Portfolio Allocation: A New Approach to Successful Portfolio Optimization New York, NY. http://irenealdridge.com/ia/category/big-data/, id 3142880.
13 Chen C., Iyengar G., Moallemi C.C. An Axiomatic Approach To Systemic Risk, Management Science, 2011. doi: 10.2307/23443854.
14 Shvedov A.S. Teoriya effektivnykh portfeley tsennykh bumag [Theory of effective securities portfolio] (Publishing House of the State University Higher School of Economics, Moscow, 1999) [in Russian].
15 Shvedov A.S. Protsentnyye finansovyye instrumenty: otsenka i khedzhirovaniye. [Interest financial instruments: valuation and hedging] (State University Higher School of Economics, Moscow, 2001) [in Russian].
16 Dem'yanov V.F., Malozyemov V.N. Vvedeniye v minimaks [Introduction to minimax] (Science, Moscow, 1972) [in Russian].
17 Simi F.A., Talukder Md.Sh. A New Approach for Solving Linear Fractional Programming Problems with Duality Concept, Open Journal of Optimization, 6, 1-10(2017). http://www.scirp.org/journal/ojop.

18 Nasseri S.H., Ebrahimneja A. A New Approach to Duality in Fuzzy Linear Programming // In book: Fuzzy Engineering and Operation Research – 2012. doi: 10.1007/978-3-642-28592-9_2.
19 Malykhin V.I. Optimal'nyye portfeli i pakety tsennykh bumag [Optimal portfolios and packages of securities] (State University of Management, Moscow, 2002). [in Russian]
20 Malykhin V.I. Model' rosta kapitala s garantiyey nerazoreniya [Model of capital growth with a guarantee of non-breaking] Ekonomika i matematicheskiye metody [Economy and mathematical methods], (40), 134-136 (2004). [in Russian]
21 Malykhin V.I., Nurtazina K.B. Issledovaniye parametrov fondovogo rynka [Study of stock market parameters], Sinergeticheskiye idei v obrazovanii [Synergistic ideas in education], 52-57 (2006). [in Russian]
22 Nurtazina K.B., Malykhin V.I. Soderzhatel'nyy smysl parametrov fondovogo rynka [The meaningful meaning of the stock market parameters] Vestnik universiteta [University Bulletin]. (1), 272-285 (2011). [in Russian]
23 Malykhin V.I., Nurtazina K.B. The Mathematical Theory of the Stock market, Lap-publishing company, DBR, 2012
24 Nurtazina K.B. Formirovaniye portfelya tsennykh bumag v usloviyakh neopredelennosti [Formation of a securities portfolio in the face of uncertainty] Vestnik MGU [Moscow State University Bulletin, Seriya 6: Ekonomika], (5), 64-74 (2008). [in Russian]
25 Nurtazina K.B. Upravlencheskiye resheniya v usloviyakh neopredelennosti [Management decisions in conditions of uncertainty], Vestnik universiteta [University Bulletin], (20), 24-34 (2010). [in Russian]
26 Nurtazina K.B. Modifitsirovannaya skhema prinyatiya resheniy v usloviyakh neopredelennosti i dvoystvennost' [Modified decision-making scheme in conditions of uncertainty and duality], Vestnik universiteta [University Bulletin], (24), 429-436 (2010) [in Russian]
27 Nurtazina K.B. Nekotoryye osobennosti obobshchennoy teorii dvoystvennosti [Some features of the generalized theory of duality], Sovremennyye problemy analiza i prepodavaniya matematiki: Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, posvyashchennoy 105-letiyu akademika Sergeya Mikhaylovicha Nikol'skogo [Modern problems of analysis and teaching of mathematics: Materials of the International Scientific Conference dedicated to the 105th anniversary of Academician Sergei Mikhailovich Nikol'skii], 113-114 (2010) [in Russian]
28 Nurtazina K.B. Optimizatsiya portfelya tsennykh bumag i upravleniye v usloviyakh neopredelennosti. Monografiya [Optimization of the securities portfolio and management in conditions of uncertainty] (State University of Management, Moscow, 2011). [in Russian]
29 Nurtazina K.B. Analiz chuvstvitel'nosti v portfel'nom investirovanii [Analyze sensitivity to portfolios investment], Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki. Spec. vypusk [Severo-Caucasus region. Esthetic Science] (Special note), 45-47 (2011). [in Russian]
30 Nurtazina K.B. Novyy pokazatel' effektivnosti napravleniy predprinimatel'skoy deyatel'nosti [New indicator of the effectiveness of business areas], Vestnik universiteta [University Bulletin], (5), 353-359 (2011). [in Russian]
31 Malykhin V.I. Matematika v ekonomike [Mathematics in economics], (INFRA, Moscow, 2002). [in Russian]
32 Malykhin V.I. Sotsial'no-ekonomicheskaya struktura obshchestva: Ucheb. posobiye dlya vuzov [Socio-economic structure of society: Textbook. manual for universities] (YUNITI-DANA, Moscow, 2003). [in Russian]
33 Malykhin V.I. Matematicheskoe modelirovanie sotsial'no-ekonomicheskoi struktury obshchestva: 2-oe izd. [Mathematical model of socio-economic structure of society: Textbook. manual for universities] (LENAND, Moscow, 2015). [in Russian]
34 Malykhin V.I. Finansovaya matematika: Ucheb. posobiye dlya vuzov [Financial Mathematics: Textbook. manual for universities]. (LENAND, Moscow, 2015). [in Russian]
35 Malykhin V.I. Ekonomiko-matematicheskoye modelirovaniye nalogooblozheniya: Ucheb. Posobiye [Economic-mathematical modeling of taxation: Textbook. Allowance]. (Higher School, 2006). [in Russian]

Сведения об авторах:

Малыхин В.И. - доктор физико-математических наук, профессор, Государственного университета управления, улица Вешняковская 19, Москва, Россия.

Нуртазина К.Б. - кандидат физико-математических наук, доцент Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева 2, Астана, Казахстан.

Malykhin V.I. - doctor of physical and mathematical sciences, professor, State University of Management, Veshnyakovskaya str. 19, Moscow, Russia.

Nurtazina K.B. - candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str. 2, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 26.11.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Редакторы: Н. Темірғалиев

Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2018. 4(125)- Астана: ЕҰУ. 128-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: (8-717-2) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды