A. A. Alimbaev, A. S. Naurazbekova, D. Kh. Kozybaev, Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of free algebras of rank 2, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1133–1146

DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.077

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1133–1146 (2019) УДК 512.5
DOI 10.33048/semi.2019.16.077 MSC 17A36

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ АВТОМОРФИЗМОВ И ТРИАНГУЛЯЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР РАНГА 2

А.А. АЛИМБАЕВ, А.С. НАУРАЗБЕКОВА, Д.Х. КОЗЫБАЕВ

Abstract. We define a class of $\circ$-varieties of algebras and prove that the tame automorphism group of a free algebra of rank two of any $\circ$-variety of algebras over a field admits an amalgamated free product structure. In particular, the automorphism group of a free right-symmetric algebra of rank two admits an amalgamated free product structure. Using this structure, we prove that any locally finite group of automorphisms of this algebra is conjugate to a subgroup of affine or triangular automorphisms. This implies that any reductive group of automorphisms of a two-generated free right-symmetric algebra is linearizable and any locally nilpotent derivation of this algebra is triangulable over a field of characteristic zero. All of these results are true for free commutative and free non-associative algebras of rank two.

Keywords: free right-symmetric algebra, automorphism, free product, linearization, triangulation.

1. Введение

Хорошо известно, что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x, y]$ являются ручными [1, 2]. Более того, группа автоморфизмов $Aut(k[x, y])$ этой алгебры допускает структуру амальгамированного свободного произведения [2, 3], т.е.

$$Aut(k[x, y]) = A *_C B,$$

где A — подгруппа аффинных автоморфизмов, B — подгруппа треугольных автоморфизмов и $C = A \cap B$. Аналогичные результаты также имеют место для свободных ассоциативных алгебр [4, 5] и для свободных алгебр Пуассона над

Alimbaev, A.A., Naurazbekova, A.S., Kozybaev, D.Kh., Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of free algebras of rank 2.

Работа поддержана МОН РК (грант AP05133009).

Поступила 19 декабря 2018 г., опубликована 20 августа 2019 г.

полем нулевой характеристики [6], причем группы автоморфизмов этих алгебр изоморфны группе автоморфизмов алгебры многочленов.

В работе [21] Л. Макар-Лиманов, Д. Козыбаев, У. Умирбаев доказали, что автоморфизмы свободных правосимметричных алгебр ранга два являются ручными. Группы автоморфизмов этих алгебр гораздо шире чем группы автоморфизмов алгебр многочленов благодаря богатой структуре элементарных автоморфизмов.

В 1964 году П. Кон [7] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над произвольным полем являются ручными. Дж. Левин [8] обобщил этот результат для шрайеровых многообразий алгебр. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [9], коммутативных и антикоммутативных алгебр [10], алгебр Ли [11, 12] и супералгебр Ли [13, 14]. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр конечного ранга над полями также являются ручными.

В 1979 году Т. Камбаяши [15], используя структуру амальгамированного свободного произведения группы автоморфизмов $Aut(k[x,y])$, доказал, что любая алгебраическая подгруппа группы автоморфизмов $Aut(k[x,y])$ сопряжена с подгруппой линейных или треугольных автоморфизмов. Из этого следует, что действие любой редуктивной группы на k^n, где $n=2$, является линеаризуемым. Т. Камбаяши также предположил, что этот результат справедлив для всех $n>2$. Это предположение получило название гипотезы линеаризации для действий редуктивных групп. Оказалось, что эта гипотеза не верна для $n\geq 4$. Например, в 1989 году Шварц [16] построил контрпримеры нелинеаризуемых действий ортоганальной группы O_2 на k^4 и Sl_2 на k^7. Первые примеры нелинеаризуемых действий конечных групп были построены в [17, 18].

В 1968 году Р. Ренчлер [19] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Рассмотрим дифференцирование ∂ алгебры многочленов $k[x,y,z]$ от трех переменных x,y,z над полем k характеристики 0, определенное правилом

$$\partial : x \longmapsto 2y, \quad y \longmapsto z, \quad z \longmapsto 0.$$

Тогда $w=y^2-xz$ принадлежит ядру дифференцирования ∂ и дифференцирование

$$D = w\partial \tag{1}$$

является локально-нильпотентным. Х. Басс [20] показал не триангулируемость дифференцирования $D=w\partial$.

В данной работе мы докажем, что группа автоморфизмов свободной правосимметричной алгебры ранга два допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Используя эту структуру, мы также докажем линеаризуемость редуктивной группы автоморфизмов и триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободной правосимметричной алгебры ранга два в случае нулевой характеристики. Аналогичные результаты верны также для свободных неассоцитивных алгебр и свободных коммутативных алгебр ранга два. Отметим, что автоморфизмы свободных алгебр Ли и свободных антикоммутативных алгебр от двух переменных являются линейными.

Структура амальгамированного свободного произведения впервые используется в данной работе для доказательства триангулируемости локально-нильпотентных дифференцирований. В частности, теорема Ренчлера и триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободных ассоциативных алгебр ранга два являются следствиями результатов работ [1, 2, 4, 5].

В параграфе 2 данной работы мы определим класс $\circ$-многообразий алгебр, который является обобщением класса всех известных многообразий алгебр, где группы автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр над полем ручные и допускает структуру амальгамированного свободного произведения. В частности, многообразия ассоциативно-коммутативных алгебр, ассоциативных алгебр, алгебр Пуассона, перечисленные выше шрайеровы многообразия являются $\circ$-многообразиями. Мы докажем, что многообразие правосимметричных алгебр также является $\circ$-многообразием. В параграфе 3 докажем, что группа ручных автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр $\circ$-многообразий над полем допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Неизвестно, будут ли все автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр $\circ$-многообразий над полем ручными. В частности, этот вопрос остается открытым для свободных двупорожденных алгебр Новикова.

В параграфе 4 доказывается линеаризуемость редуктивной группы автоморфизмов и в параграфе 5 доказывается триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободных правосимметричных алгебр ранга два в случае нулевой характеристики.

2. $\circ$-МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР

Пусть k — произвольное поле и пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное однородное многообразие алгебр над полем k. Через $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ будем обозначать свободную алгебру этого многообразие от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через $\deg$ обозначим стандартную функцию степени на $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, то есть $\deg(x_i) = 1$ для i.

Многообразие $\mathfrak{M}$ назовем $\circ$-*многообразием*, если выполняется следующее условие: для любого ненулевого $h \in \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ и для любого ненулевого $f \in \mathfrak{M}\langle x\rangle$ имеем

$$\deg(f(h)) = \deg(f) \cdot \deg(h).$$

Очевидными примерами $\circ$-многообразий алгебр являются:

1. Многообразие ассоциативно-коммутативных алгебр,
2. Многообразие ассоциативных алгебр [7],
3. Многообразие алгебр Пуассона [6].

В этом параграфе мы покажем, что многообразие правосимметричных алгебр является $\circ$-многообразиеми.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – конечный алфавит. Через X^* обозначим множество всех неассоциативных слов в алфавите X. Через $\deg(u)$ будем обозначать функцию степени на X^* такую, что $\deg(x_i) = 1$ для всех i. Каждое неассоциативное слово u степени ≥ 2 единственным образом представляется в виде $u = u_1u_2$, $\deg(u_1), \deg(u_2) < \deg(u)$.

Положим $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Пусть u и v – произвольные элементы X^*. Положим $u < v$, если $\deg(u) < \deg(v)$. Пусть $\deg(u) = \deg(v) \geq 2$, $u = u_1u_2$, $v = v_1v_2$, то положим $u < v$, если $u_1 < v_1$ или $u_1 = v_1$ и $u_2 < v_2$.

Слово называется *плохим*, если оно содержит подслово вида $(rs)t \in X^*$, где $\deg(r), \deg(s), \deg(t) \geq 1$ и $s > t$. Слово называется *хорошим*, если оно не плохое. Через W обозначим множество всех хороших слов в алфавите X.

Через $RS_n = RS\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ обозначим свободную правосимметричную алгебру от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ над полем k. Согласно [22] множество всех хороших слов W формирует линейный базис RS_n. Каждый ненулевой элемент f из RS_n единственным образом представляется в виде

$$f = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_m w_m,$$

где $w_i \in W$, $0 \neq \lambda_i \in k$ для всех i и $w_1 > w_2 > ... > w_m$. Слово w_1 называется *старшим словом* элемента f и обозначается через $\overline{f}$.

Для каждого $f \in RS_n$ через R_f обозначим оператор правого умножения на f, действующий в RS_n, т.е. $uR_f = uf$ для всех $u \in RS_n$. В частности, если $w, w_1, w_2, ..., w_m \in X^*$, то

$$wR_{w_1}R_{w_2}...R_{w_m} = (...((ww_1)w_2)...w_m).$$

В [21] доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. [21] *Произвольное хорошее слово w единственным образом представляется в виде*

$$w = x_i R_{w_1} R_{w_2} ... R_{w_m},$$

где $w_j \in W$ для всех j и $w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_m$.

По определению хорошего слова очевидна справедливость обратного утверждения леммы 1, т.е.

Лемма 2. *Пусть $w \in RS_n$ и*

$$w = x_i R_{w_1} R_{w_2} ... R_{w_m},$$

где $w_j \in W$ для всех j и $w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_m$. Тогда w - хорошее слово.

Лемма 3. [21] *Пусть u и v – произвольные хорошие слова и предположим, что $u = x_i R_{u_1} R_{u_2} ... R_{u_m}$. Тогда*

$$\overline{uv} = x_i R_{u_1} ... R_{u_s} R_v R_{u_{s+1}} ... R_{u_m},$$

где $u_1 \leq ... \leq u_s \leq v \leq u_{s+1} \leq ... \leq u_m$.

Следствие 1. [21] *Пусть $u, v, w \in W$, то $\overline{(uv)w} = \overline{(uw)v}$.*

Лемма 4. [21] *Пусть u, v, w — произвольные хорошие слова алгебры RS_n. Если $u < v$, то $\overline{wu} < \overline{wv}$ и $\overline{uw} < \overline{vw}$.*

Следствие 2. [21] *Если $f, g \in RS_n$, то $\overline{fg} = \overline{\overline{f}\,\overline{g}}$.*

Лемма 5. *Пусть v, u – хорошие слова алгебры $RS\langle y\rangle$, w — хорошее слово алгебры $RS\langle x, y\rangle$ и $v > u$. Тогда*

1) $v(w) \in W$;

2) $v(w) > u(w)$.

Доказательство. Справедливость первого утверждения леммы очевидна при $\deg v = 1$. Пусть $\deg v = k$. Докажем оба утверждения леммы параллельно индукцией по k.

По лемме 1 $w = zR_{w_1}...R_{w_s}$, где $w_1 \leq ... \leq w_s$ и $z \in \{x, y\}$. Если $k = 2$, то $v = yy$ и

$$v(w) = ww = (zR_{w_1}...R_{w_s})w.$$

Так как $w_1 \leq ... \leq w_s < w$, то $v(w)$ — хорошее слово.

Так как $v = yy$, то неравенство $v > h$ возможно только при $u = y$. Тогда $v(w) > u(w)$.

Предположим, что утверждения леммы справедливы для всех значений меньших чем k. Пусть $v = yR_{v_1}...R_{v_t}$, $v_1 \leq ... \leq v_t$, и $u = yR_{u_1}...R_{u_r}$, $u_1 \leq ... \leq u_r$. Имеем

$$v(w) = wR_{v_1(w)}...R_{v_t(w)} = (zR_{w_1}...R_{w_s})R_{v_1(w)}...R_{v_t(w)}.$$

По индуктивному предположению $v_1(w), ..., v_t(w)$ – хорошие слова и $w_1 \leq ... \leq w_s < v_1(w) \leq ... \leq v_t(w)$, тогда согласно лемме 2 $v(w)$ – хорошее слово.

Так как $v > u$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $\deg(v) > \deg(u)$, тогда $\deg(v(w)) > \deg(u(w))$. Следовательно, $v(w) > u(w)$.

2) $\deg(v) = \deg(u)$, $yR_{v_1}...R_{v_{t-1}} > yR_{u_1}...R_{u_{r-1}}$ или же $yR_{v_1}...R_{v_{t-1}} = yR_{u_1}...R_{u_{r-1}}$ и $v_t > u_r$. По индуктивному предположению $wR_{v_1(w)}...R_{v_{t-1}(w)} > wR_{u_1(w)}...R_{u_{r-1}(w)}$ или $wR_{v_1(w)}...R_{v_{t-1}(w)} = wR_{u_1(w)}...R_{u_{r-1}(w)}$ и $v_t(w) > u_r(w)$. Следовательно, $v(w) > u(w)$. □

Следствие 3. *Пусть $f \in RS\langle y \rangle$, $g \in RS\langle x, y \rangle$. Тогда $\overline{f(g)} = \overline{f}(\overline{g})$.*

Доказательство. По следствию 2 и лемме 5 имеем $\overline{f(g)} = \overline{\overline{f}(\overline{g})} = \overline{f}(\overline{g})$. □

Предложение 1. *Многообразие правосимметричных алгебр является ◦- многообразием.*

Несложно показать, что утверждение следствия 3 также справедливо для свободных неассоциативных и свободных коммутативных алгебр ранга 2 над полем k. Следовательно, многообразия всех неассоциативных и всех коммутативных алгебр являются ◦-многообразиями.

3. Амальгамированное свободное произведение

Пусть k — произвольное поле. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное ◦-многообразие алгебр над k и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2. Пусть также $Aut(A)$ – группа автоморфизмов алгебры A. Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x) = f_1, \varphi(y) = f_2$. Автоморфизмы вида

$$\sigma(1, a, f) = (ax + f(y), y),$$

$$\sigma(2, a, g) = (x, ay + g(x)),$$

где $0 \neq a \in k$, $f(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle$, $g(x) \in \mathfrak{M}\langle x\rangle$, называются *элементарными*. Подгруппа $T(A)$ группы $Aut(A)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Не ручные автоморфизмы называются *дикими*.

Для автоморфизма $\theta = (f_1, f_2) \in Aut(A)$ определим степень, общую степень и бистепень, полагая, соответственно

$$\deg(\theta) = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\},$$

$$\mathrm{tdeg}(\theta) = \deg(f_1) + \deg(f_2),$$

$$\mathrm{bideg}(\theta) = (\deg(f_1), \deg(f_2))\,.$$

Если

$$\theta = (f_1, f_2),\ \ \varphi = (g_1, g_2),$$

то произведение в $Aut(A)$ определяется следующей формулой:

$$\theta \circ \varphi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)).$$

Пусть $Af_2(A)$ – группа аффинных автоморфизмов алгебры A, т.е. группа автоморфизмов вида

$$(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2),$$

где $a_i, b_i, c_i \in k, a_1b_2 \neq a_2b_1$, $Tr_2(A)$ – группа треугольных автоморфизмов алгебры A, т.е. группа автоморфизмов вида

$$(ax + f(y), by + c),$$

где $0 \neq a, b \in k,\ c \in k,\ f(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle$, и пусть $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$.

Пусть G — произвольная группа, G_0, G_1, G_2 — подгруппы группы G, причем $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа G называется *свободным произведением подгрупп* G_1 *и* G_2 *с объединенной подгруппой* G_0 и обозначается $G = G_1 *_{G_0} G_2$, если

(a) G порождается подгруппами G_1 и G_2;
(b) Определяющие соотношения группы G состоят только из определяющих соотношений подгрупп G_1 и G_2.

Если S_1 – система левых представителей G_1 по G_0, S_2 – система левых представителей G_2 по G_0, то группа G является свободным произведением подгрупп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой G_0 (см. например [23]) в том и только в том случае, когда каждый $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \dots g_k c,$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2,\ i = 1, \dots, k,\ g_i, g_{i+1}$ одновременно не принадлежат S_1 и S_2, $c \in G_0$.

Запись $h_i(y)$ в доказательствах следующих нескольких лемм означает, что $h_i(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle$ – однородный элемент степени i по отношению к функции степени deg от одной переменной y. Ясно, что $h_0(y) \in k$.

Лемма 6. *a) Система элементов*

$$A_0 = \{id = (x, y), \gamma = (y, x + ay) | a \in k\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Af_2(A)$ по подгруппе C.

b) Система элементов

$$B_0 = \{\beta = (x + q(y), y) | q(y) = h_2(y) + \ldots + h_n(y)\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Tr_2(A)$ по подгруппе C.

Доказательство. Проверим условие a). Пусть $l \in Af_2(A)$. Мы должны показать, что для любого l найдутся $\gamma \in A_0$, $\eta \in C$ такие, что $l = \gamma \circ \eta$.

Если $l = (a_1x+b_1y+c_1, a_2x+b_2y+c_2)$, где $a_2 \neq 0$, то положим $\gamma = (y, x+\frac{b_2}{a_2}y)$, $\eta = ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2)$. Тогда l представляется в виде

$$l = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y) \circ ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2) = \gamma \circ \eta.$$

Если $a_2 = 0$, то $\gamma = id$, $\eta = l$, т.е. $l = id \circ l$.

Допустим $\gamma_1 = (y, x + a_1y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2y)$ и $\gamma_1C = \gamma_2C$, тогда

$$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = (-a_1x + y, x) \circ (y, x + a_2y) = (x, (-a_1 + a_2)x + y).$$

Отсюда следует, что $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Теперь проверим условие b). Пусть $\psi = (ax + h(y), by + c) \in Tr_2(A)$ и $h(y) = h_0(y) + h_1(y) + \ldots + h_n(y)$. Мы должны показать, что для любого ψ найдутся $\beta \in B_0$, $\mu \in C$ такие, что $\psi = \beta \circ \mu$. Положим $\beta = (x + \frac{1}{a}q(y), y)$, $\mu = (ax + h_0(y) + h_1(y), by + c)$, где $q(y) = h_2(y) + \ldots + h_n(y)$. Тогда ψ представляется в виде

$$\psi = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_0(y) + h_1(y), by + c) = \beta \circ \mu.$$

Допустим $\beta_1 = (x + q(y), y)$, $\beta_2 = (x + q^{(1)}(y), y)$ и $\beta_1C = \beta_2C$. Тогда имеем

$$\beta_1^{-1} \circ \beta_2 = (x - q(y), y) \circ (x + q^{(1)}(y), y) = (x - q(y) + q^{(1)}(y), y).$$

Отсюда следует, что $\beta_1^{-1} \circ \beta_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $q(y) = q^{(1)}(y)$. Следовательно, $\beta_1 = \beta_2$. □

Лемма 7. *Пусть A_0, B_0 – множества, определенные в лемме 6. Тогда любой ручной автоморфизм φ алгебры A разлагается в произведение вида*

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \tag{2}$$

где $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Доказательство. Очевидно, что

$$(ax + h(y), y) = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_0(y) + h_1(y), y),$$

где $h(y) = h_0(y) + h_1(y) + h_2(y) + \ldots + h_n(y)$, $q(y) = h_2(y) + \ldots + h_n(y)$,

$$(x, by + h^{(1)}(x)) = (y, x) \circ (x + \frac{1}{b}q^{(1)}(y), y) \circ (y, bx + h_0^{(1)}(y) + h_1^{(1)}(y)),$$

где $h^{(1)}(y) = h_0^{(1)}(y)+h_1^{(1)}(y)+h_2^{(1)}(y)+\ldots+h_m^{(1)}(y)$, $q^{(1)}(y) = h_2^{(1)}(y)+\ldots+h_m^{(1)}(y)$, т.е. любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \beta \circ l_2,$$

где $\beta \in B_0$, $l_1, l_2 \in Af_2(A)$.

Любой ручной автоморфизм φ представляется в виде композиции элементарных автоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n.$$

Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \beta_1 \circ l_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1},$$

где $\beta_i \in B_0$, $l_i \in Af_2(A)$.

Докажем индукцией по n, что φ представляется в виде произведения (2) с $k \le n$.

Согласно лемме 6 автоморфизм l_1 записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_0$, $\lambda_1 \in C$. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1.$$

Пусть $\lambda_1 = (ax + by + c, b_1y + c_1)$, $\beta_1 = (x + q(y), y)$. Тогда

$$\lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_1^{-1} = (x + \frac{1}{a} q(b_1y + c_1), y).$$

Через $q_{<2}(b_1y + c_1)$ обозначим часть степени меньше чем два элемента $q(b_1y + c_1)$. Пусть $\lambda = (x - \frac{1}{a} q_{<2}(b_1y + c_1), y)$. Ясно, что $\lambda \in C$ и $\lambda_1^{-1} \circ \lambda \in C$. Обозначим $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ через λ_2^{-1}. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \lambda_2,$$

где $\beta_1' = \lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_2^{-1} = (x + \frac{1}{a} q(b_1y + c_1) - \frac{1}{a} q_{<2}(b_1y + c_1), y) \in B_0$. Имеем

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ (\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}.$$

По индуктивному предположению произведение

$$(\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}$$

записывается в виде

$$\gamma_2 \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \ k \le n.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \gamma_2 \circ \beta_2' \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Если $\gamma_2 \ne id$, то полученное представление имеет вид (2). Теперь рассмотрим случай когда $\gamma_2 = id$. Так как $\beta_1' \circ \beta_2' = \beta_2'' \in B_0$, то

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \beta_2'' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Поскольку $k - 1 < n$, то по индуктивному предположению φ записывается в виде (2). $\square$

Лемма 8. *Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ – автоморфизм алгебры A, представимый в виде произведения*

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k,$$

где $id \ne \gamma_i \in A_0$, $id \ne \beta_i \in B_0$ для всех i. Если $\beta_i = (x + q_i(y), y)$, $\deg(q_i(y)) = n_i$ для всех $1 \le i \le k$, то

$$\deg(f_1) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k,$$

$$\deg(f_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1}, \ \textit{если } k > 1$$

и

$$\deg(f_2) = 1, \ \textit{если } k = 1.$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по k. Если $k = 1$, то $\varphi = \beta_1$ и

$$\deg(f_1) = \deg(q_1(y)) = n_1,$$
$$\deg(f_2) = 1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k-1$. Положим

$$\varphi_1 = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_{k-1} \circ \beta_{k-1} = (g_1, g_2).$$

По индуктивному предположению имеем

$$\deg(g_1) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1},$$
$$\deg(g_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-2}.$$

Тогда

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \varphi_1 \circ \gamma_k \circ \beta_k = (g_1, g_2) \circ \gamma_k \circ \beta_k.$$

Применяя $\gamma_k = (y, x + ay)$ к (g_1, g_2), получим

$$(u_1, u_2) = (g_1, g_2) \circ \gamma_k = (g_2, g_1 + ag_2).$$

Тогда

$$\deg(u_1) = \deg(g_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-2},$$
$$\deg(u_2) = \max\{\deg(g_1), \deg(g_2)\} = n_1 n_2 \ldots n_{k-1}.$$

Далее,

$$\varphi = (f_1, f_2) = (u_1, u_2) \circ \beta_k = (u_1, u_2) \circ (x + q_k(y), y) = (u_1 + q_k(u_2), u_2).$$

Следовательно,

$$\deg(f_1) = \max\{\deg(u_1), \deg(q_k(u_2))\},$$
$$\deg(f_2) = \deg(u_2).$$

Напомним, что $\deg(q_k) = n_k$ и $\deg(u_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-2}$. Так как A - свободная алгебра $\circ$-многообразия, то

$$\deg(q_k(u_2)) = \deg u_2 \cdot \deg q_k = n_1 n_2 \ldots n_k.$$

Следовательно,

$$\deg(f_1) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k,$$
$$\deg(f_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1}.$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 9. *Разложение* (2) *автоморфизма* φ *из леммы 7 является однозначным.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda \neq id,$$

при $k \geq 1$, $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Докажем от противного. Допустим, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = id.$$

Тогда

$$\beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}. \tag{3}$$

Согласно лемме 8 автоморфизм

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k$$

имеет степень

$$\operatorname{tdeg}(\varphi) = \deg(f_1) + \deg(f_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k + n_1 n_2 \dots n_{k-1}.$$

Правую часть равенства (3) обозначим через ρ, т.е.

$$\rho = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}.$$

Ясно, что $\rho \in Af_2(A)$ и $\operatorname{tdeg}(\rho) = 2$. Следовательно, $\operatorname{tdeg}(\varphi) \neq \operatorname{tdeg}(\rho)$, что противоречит равенству (3). $\square$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное $\circ$-многообразие алгебр и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над k. Группа ручных автоморфизмов алгебры A является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $Af_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(A)$ с объединенной подгруппой $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$, т.е.*

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

Доказательство. Так как A_0 и B_0 — системы левых смежных классов $Af_2(A)$ и $Tr_2(A)$ по подгруппе C, соответственно, то по лемме 7 и лемме 9 любой ручной автоморфизм алгебры A однозначно представляется в виде (2), т.е. $T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A)$. $\square$

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий: либо правосимметричных, либо неассоциативных, либо коммутативных алгебр, и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над k. Группа автоморфизмов алгебры A является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $Af_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(A)$ с объединенной подгруппой $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$, т.е.*

$$Aut(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

4. Линеаризация автоморфизмов

Пусть k – произвольное поле. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное $\circ$-многообразие алгебр над k и $A_n = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Подгруппа G группы $Aut(A_n)$ называется локально-конечной, если для любого конечномерного подпространства $V \subset A_n$ пространство $G.V = \{g(v) | g \in G, v \in V\}$ является конечномерным.

Лемма 10. *Пусть G — подгруппа группы $Aut(A_n)$. Если $G.V$ – конечномерное пространство для $V = kx_1 + ... + kx_n$, то G - локально-конечная подгруппа.*

Доказательство. Пусть W — любое конечномерное подпространство алгебры A_n и $h_1, ..., h_s$ – ее базис. Так как $G.V$ - конечномерное пространство, то найдется такое целое d, что $\deg g(h_i) < d$ для любого i и любого $g \in G$. Так как в алгебре A_n базисных элементов степени меньше чем d конечное число, то $G.W$ — конечномерное пространство. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное $\circ$-многообразие алгебр, $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ -свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над k и G - локально-конечная подгруппа группы $T(A)$. Тогда G сопряжена с подгруппой $Af_2(A)$ или $Tr_2(A)$.*

Доказательство. Пусть $W = kx_1 + kx_2$. Так как G — локально-конечная подгруппа группы $T(A)$, то $G.W$ - конечномерное подпространство алгебры A. Пусть $d = \mathrm{maxdeg} f$, где f пробегает $G.W$. Итак, d конечно. Следовательно,

$$\deg g \leq d \text{ для всех } g \in G.$$

По теореме 1 группа $T(A)$ является амальгамированным свободным произведением группы аффинных $Af_2(A)$ и группы треугольных $Tr_2(A)$ автоморфизмов по их пересечению. Тогда каждый элемент H группы $T(A)$ можно записать как

$$H = \lambda_0 \tau_1 \lambda_1 ... \tau_l \lambda_l, \tag{4}$$

где $\lambda_i \in Af_2(A) \backslash Tr_2(A)$ для всех $1 \leq i \leq l-1$ и $\tau_i \in Tr_2(A) \backslash Af_2(A)$ для всех $1 \leq i \leq l$. По лемме 8

$$\mathrm{bideg}(\tau_1 \lambda_1 ... \tau_l \lambda_l) = \left(\prod_{j=1}^{l} \deg \tau_j, \prod_{j=1}^{l-1} \deg \tau_j \right).$$

Отсюда следует, что

$$\deg H \geq \prod_{j=2}^{l} \deg \tau_j \geq 2^{l-1}.$$

Применяя последнее неравенство к g и учитывая, что $\deg g \leq d$, имеем

$$2^{l-1} \leq d, \text{ т.е.} l \leq \log_2 2d. \tag{5}$$

Определим длину элемента группы $T(A)$ как минимальное число элементов $Af_2(A) \cup Tr_2(A)$ необходимых для выражения его в виде свободного произведения. Из (4) имеем, что длина $H \leq 2l + 1$. Итак, используя (5), получаем

$$\text{длина } g \leq 2(\log_2 d) + 1, \text{ для всех } g \in G.$$

Справедливость утверждения данной теоремы следует из следующего результата о подгруппах амальгамированных свободных произведений [24]: если G_1 - абстрактная группа, которая является амальгамированным свободным произведением своих подгрупп H_1 и H_2 по их пересечению, и более того, элементы G_1 имеют ограниченную длину, тогда каждая подгруппа группы G_1 является сопряженной либо к подгруппе H_1 либо к подгруппе H_2. □

Следуя Шафаревичу [3] и Камбаяши [15] на $Aut(A_n)$ можно ввести возрастающую фильтрацию алгебраических множеств. Это позволяет нам рассматривать $Aut(A_n)$ как бесконечномерную алгебраическую группу в смысле Шафаревича [3]. Действительно, для каждого положительного целого числа d положим

$$Y_d = \left\{ \phi \in Aut(A_n) : \deg \phi \leq d, \deg \phi^{-1} \leq d \right\}.$$

Используя те же рассуждения, что и Камбаяши [15], несложно показать справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. *Множество Y_d имеет структуру алгебраического множества. Y_d является замкнутым алгебраическим подмножеством алгебраического множества Y_{d+1} для каждого $d > 0$.*

Утверждение 2. *Группа автоморфизмов* $Aut(A_n) = \bigcup Y_d = \underrightarrow{lim} Y_d$ *является бесконечномерной алгебраической группой в смысле Шафаревича* [3].

Согласно Камбаяши [15] *алгебраической подгруппой* группы $Aut(A_n) = \bigcup Y_d$ называется абстрактная подгруппа группы $Aut(A_n)$, которая также является замкнутым подмножеством множества Y_d для некоторого d. Действие алгебраической группы G на A_n может быть определено как гомоморфизм $G \to Aut(A_n)$ при котором образ G является алгебраической подгруппой группы $Aut(A_n)$.

G-модуль $V \neq 0$ называется *неприводимым* или простым, если он не имеет собственных не нулевых G-подмодулей. G-модуль V называется *вполне приводимым* или полупростым, если для каждого G-подмодуля W G-модуля V существует дополняющий G-подмодуль W' G-модуля V такой, что $V = W \oplus W'$. Алгебраическая подгруппа G группы $Aut(A_n)$ называется (линейно) *редуктивной*, если каждый конечномерный G-модуль является вполне приводимым.

Напомним также, что автоморфизм $f \in Aut(A_n)$ называется *линеаризуемым*, если существует $\varphi \in Aut(A_n)$ такой, что $\varphi^{-1} f \varphi \in Af_2(A_n)$.

Следствие 5. *Любая редуктивная группа ручных автомофизмов двупорожденной свободной алгебры A $\circ$-многообразия над полем нулевой характеристики линеаризуема.*

Доказательство. Пусть G — редуктивная группа ручных автомофизмов алгебры A. По теореме 2 G сопряжена с подгруппой $Af_2(A)$ или $Tr_2(A)$. Так как любая подгруппа группы $Tr_2(A)$ не является редуктивной, то подгруппа G линеаризуема. □

Как уже было отмечено выше, автоморфизмы свободных алгебр Ли и свободных антикоммутативных алгебр от двух переменных являются линейными. А линеаризация автоморфизмов свободных ассоциативных алгебр и свободных алгебр Пуассона ранга 2 изоморфна линеаризации автоморфизмов алгебры многочленов $k[x, y]$ над полем нулевой характеристики.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий: либо правосимметричных, либо неассоциативных, либо коммутативных алгебр, и $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над полем k нулевой характеристики. Тогда любая редуктивная группа автомофизмов алгебры A линеаризуема.*

5. Триангуляция локально-нильпотентных дифференцирований

Теорема 3. *Любое локально-нильпотентное дифференцирование D двупорожденной свободной алгебры A $\circ$-многообразия такое, что* $\exp D \in T(A)$, *триангулируемо в случае поля нулевой характеристики.*

Доказательство. Пусть D – произвольное локально-нильпотентное дифференцирование алгебры A такое, что отображение $g = \exp D = \sum_{i=0}^{m} \frac{D^p}{p!}$ является ручным автоморфизмом алгебры A [25]. Так как D – локально-нильпотентное дифференцирование, то существует целое положительное число d такое, что $\deg g < d$. Следовательно, g является локально-конечным ручным автоморфизмом и по теореме 2 он триангулируем, т.е. существует $\varphi \in Aut(A)$ такой, что $\varphi^{-1}g\varphi \in Tr_2(A)$. Далее,

$$\varphi^{-1}g\varphi = \varphi^{-1}\exp D\varphi = \varphi^{-1}\sum_{i=0}^{m}\frac{D^p}{p!}\varphi = \sum_{i=0}^{m}\frac{(\varphi^{-1}D\varphi)^p}{p!} = \exp(\varphi^{-1}D\varphi) \in Tr_2(A).$$

Отсюда следует, что $\varphi^{-1}D\varphi \in Tr_2(A)$. □

Как отмечалось выше, в работе [19] Р. Ренчлер доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Аналог этого результата для свободных алгеб Пуассона был доказан в работе [6].

Следствие 7. *Любое локально-нильпотентное дифференцирование свободной ассоциативной алгебры ранга 2 над полем нулевой характеристики триангулируемо.*

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий: либо правосимметричных, либо неассоциативных, либо коммутативных алгебр, и* $A = \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ *– свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2 над полем k нулевой характеристики. Тогда локально-нильпотентное дифференцирование алгебры A триангулируемо.*

Авторы благодарят профессора У.У. Умирбаева за постановку задачи, полезные советы и коментарии при написании данной работы.

References

[1] H.W.E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math., **184** (1942), 161–174. Zbl 0027.08503

[2] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde, **1**:3 (1953), 33–41. Zbl 0050.26002

[3] I.R. Shafarevich, *On some infinite dimensional algebraic groups*, Rend. Mat. e Appl., **25**:5 (1966), 208–212. Zbl 0149.39003

[4] A.G. Czerniakiewicz, *Automorphisms of a free associative algebra of rank 2*, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 393–401; **171** (1972), 309–315. Zbl 0227.16002; Zbl 0227.16001

[5] L. Makar-Limanov, *The automorphisms of the free algebra of two generators*, Funksional. Anal. i Prilozhen., **4**:3 (1970), 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl., **4** (1970), 262–263. Zbl 0218.13006

[6] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, *Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables*, J. Algebra. **322**:9 (2009), 3318–3330. Zbl 1233.17016

[7] P.M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*, Proc. London Math. Soc., **56** (1964), 618–632. Zbl 0142.27704

[8] J. Lewin, *On Schreier varities of linear algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 553–562. Zbl 0172.04201

[9] A.G. Kurosh, *Nonassociative free algebras and free products of algebras*, Mat. Sb., **20** (1947), 239–262. Zbl 0041.16803

[10] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras*, Mat. Sb., **34**:76 (1954), 81–88. Zbl 0055.02703

[11] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free Lie algebras*, Mat. Sb., **33**:75 (1953), 441–452. Zbl 0052.03004

[12] E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*, Math. Z., **64** (1956), 195–216. Zbl 0070.02903

[13] A.A. Mikhalev, *Subalgebras of free color Lie superalgebras*, Math. Notes, **37**:5 (1985), 653–661. Zbl 0583.17003

[14] A.S. Shtern, *Free Lie superalgebras*, Sib. Mat. Z., **27**:1 (1986), 170–174. Zbl 0597.17002

[15] T. Kambayashi, *Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space*, J. of Algebra, **60** (1979), 439–451. Zbl 0429.14017

[16] G. Schwarz, *Exotic algebraic group actions*, C.R. Acad. Sci. Paris. **309** (1989), 89–94. Zbl 0688.14040

[17] L. Moser-Jauslin, M. Masuda and T Petrie, *The equivariant Serre Problem for abelian groups*, Topology, **35**:2 (1996), 329–334. Zbl 0884.14007

[18] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie, *Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Application*, Proc.Natl.Acad.Sci. USA, **88** (1991), 9065–9066. Zbl 0753.14005

[19] R. Rentschler, *Operations du groure additif sur le plan*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A, **267** (1968), 384–387. Zbl 0165.05402

[20] H. Bass, *A non-triangular action of G_a on A^3*, J. of Pure and Appl. Algebra, **33**:1 (1984), 1–5. Zbl 0555.14019

[21] D. Kozybaev, L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras*, Asian-European Journal of Mathematics, **1** (2008), 243–254. Zbl 1168.17002

[22] D. Segal, *Free Left-Symmetric algebras and an Analogue of the Poincre-Birkhoff-Witt Theorem*, Jornal of Algebra, **164** (1994), 750–772. Zbl 0831.17001

[23] W. Magnus, A. Karrass , D. Solitar, *Combinatorial group theory*, New York: Dover Publications, 1976. Zbl 0362.20023

[24] J.-P. Serre, *Trees*, Berlin-Heidenberg-New York: Springer-Verlag, 1980. Zbl 0548.20018

[25] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 2000. Zbl 0962.14037

Alibek Alpysbaevich Alimbaev
U. Sultangazin Kostanay State Pedagogical University,
118, Tauelsizdik stk.,
Kostanay, 110000, Kazakhstan
E-mail address: alialimbayev@gmail.com

Altyngul Serikovna Naurazbekova, Daniyar Khaibildaevich Kozybaev
L.N. Gumilyov Eurasian National University,
2, Satpaev str.,
Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan
E-mail address: altyngul.82@mail.ru, kozybaev@gmail.com