



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. A. Duisengaliyeva, U. U. Umirbaev, Duisengaliyeva, B.A., Umirbaev, U.U.,
A wild automorphism of a free Novikov algebra, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018,
Volume 15, 1671–1679

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2018.15.138>

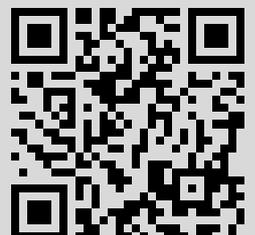
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms
of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 82.200.168.90

August 11, 2022, 13:26:38



СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1671–1679 (2018)

УДК 512.5

DOI 10.33048/semi.2018.15.138

MSC 17A36

ДИКИЙ АВТОМОРФИЗМ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ
НОВИКОВА

Б.А. ДУЙСЕНГАЛИЕВА, У.У. УМИРБАЕВ

ABSTRACT. An example of a non-triangulable locally nilpotent derivation and an example of a wild exponential automorphism of the free Novikov algebra $N\langle x, y, z \rangle$ in three variables x, y, z over a field of characteristic zero are constructed.

Keywords: differential polynomial algebra, free Novikov algebra, derivation, automorphism.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно [1, 2, 3, 4], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x, y]$ и свободной ассоциативной алгебры $k\langle x, y \rangle$ от двух переменных над произвольным полем k являются ручными. Известно также, что автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полями нулевой характеристики [5] и автоморфизмы двупорожденных свободных правосимметричных алгебр над произвольными полями [6] являются ручными. П. Кон [7] доказал, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными.

Алгебры многочленов [8] и свободные ассоциативные алгебры [9] от трех переменных над полями нулевой характеристики имеют дикие автоморфизмы.

Р. Ренчлер [10] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полями нулевой характеристики являются триангулируемыми. Рассмотрим дифференцирование ∂ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ от трех переменных x, y, z над полем k характеристики

DUISENGALIYEVA, B.A., UMIIRBAEV, U.U., A WILD AUTOMORPHISM OF A FREE NOVIKOV ALGEBRA.

© 2018 Дуйсенгалиева Б.А., Умирбаев У.У.

Работа поддержана МОН РК (грант AP 05133009).

Поступила 21 сентября 2018 г., опубликована 18 декабря 2018 г.

0, определенное правилом

$$\partial : x \mapsto 2y, \quad y \mapsto z, \quad z \mapsto 0.$$

Тогда $w = y^2 - xz$ принадлежит ядру дифференцирования ∂ и дифференцирование

$$(1) \quad D = w\partial$$

является локально-нильпотентным. Х. Басс [11] показал не триангулируемость дифференцирования $D = w\partial$.

Известный автоморфизм Нагаты φ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ от трех переменных x, y, z над полем k характеристики 0 является [12] экспонентой дифференцирования $D = w\partial$, т.е.

$$\varphi = \exp D = \text{Id} + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots$$

Имеем

$$(2) \quad \varphi(x) = x + 2yw + zw^2, \quad \varphi(y) = y + zw, \quad \varphi(z) = z.$$

Хорошо известно [8], что автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $k[x, y, z]$ является диким в случае нулевой характеристики.

Неассоциативная алгебра $A = (A, \circ)$ называется (*левой*) *алгеброй Новикова*, если A удовлетворяет следующим тождествам:

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c), \\ (a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b,$$

для любого $a, b, c \in A$.

С.И. Гельфанд и И.Я. Дорфман в работе [13] показали, что дифференциальная коммутативная ассоциативная алгебра с дифференцированием θ относительно умножения $a \circ b = a(\theta b)$ становится алгеброй Новикова. В работах [14, 15] построены базисы свободных алгебр Новикова. Теорема о свободе для алгебр Новикова доказана в [16].

В работе [15] свободные алгебры Новикова представлены через обыкновенные алгебры дифференциальных многочленов с помощью умножения $a \circ b = a(\theta b)$. В работе [17] доказано, что такое представление имеет место и для несвободных алгебр Новикова.

Рассмотрим дифференциальные алгебры с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Дифференциальные алгебры называются *обыкновенными*, если $m = 1$, и *частными*, если $m \geq 2$. Дифференцирование D и автоморфизм Нагаты φ непосредственно дают примеры не триангулируемого дифференцирования и дикого автоморфизма алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y, z\}$. Более того, частные дифференциальные алгебры многочленов $k\{x, y\}$ от двух переменных также имеют дикие автоморфизмы [18]. Вопрос о ручных и диких автоморфизмах остается открытым для обыкновенной дифференциальной алгебры многочленов $k\{x, y\}$ от двух переменных.

В настоящей работе, используя указанные связи между алгебрами многочленов, дифференциальными алгебрами и алгебрами Новикова, построен пример не триангулируемого дифференцирования и дикого автоморфизма свободной алгебры Новикова от трех переменных над полями характеристики ноль. Эти

примеры являются аналогами дифференцирования D и автоморфизма Нагаты φ для алгебр Новикова. Для свободных двупорожденных алгебр Новикова вопрос о ручных и диких автоморфизмах остается также открытым.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены определения и некоторые понятия алгебры дифференциальных многочленов. Раздел 3 посвящен описанию базисных элементов свободных алгебр Новикова в дифференциальных алгебрах. В разделе 4 построен пример не триангулируемого дифференцирования свободной алгебры Новикова от трех переменных и в разделе 5 построен пример дикого автоморфизма свободной алгебры Новикова от трех переменных.

2. АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть R – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Отображение $d : R \rightarrow R$ называется *дифференцированием*, если для всех $s, t \in R$ выполняются условия

$$\begin{aligned}d(s + t) &= d(s) + d(t), \\d(st) &= d(s)t + sd(t).\end{aligned}$$

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ – основное множество дифференциальных операторов.

Кольцо R называется *дифференциальным кольцом* или Δ -*кольцом*, если $\delta_1, \dots, \delta_m$ являются коммутирующими дифференцированиями кольца R , т.е. $\delta_i : R \rightarrow R$ – дифференцирования и $\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i$ для всех i, j .

Пусть Θ – свободный коммутативный моноид на множестве дифференциальных операторов $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Элементы

$$\theta = \delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m}$$

моноида Θ называются *производными операторами*. Порядком θ называется число $|\theta| = i_1 + \dots + i_m$. Положим также $\gamma(\theta) = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, где \mathbb{Z}_+ – множество всех неотрицательных целых чисел.

Пусть R – произвольное дифференциальное кольцо и пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество символов. Рассмотрим множество символов $X^\Theta = \{x_i^\theta \mid 1 \leq i \leq n, \theta \in \Theta\}$ и алгебру многочленов $R[X^\Theta]$ на множестве символов X^Θ . Полагая

$$\delta_i(x_j^\theta) = x_j^{\theta \delta_i}$$

для всех $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \theta \in \Theta$, превратим алгебру $R[X^\Theta]$ в дифференциальную алгебру. Дифференциальная алгебра $R[X^\Theta]$ обозначается через $R\{X\}$ и называется *алгеброй дифференциальных многочленов* над R от множества переменных X [19].

Пусть M – свободный коммутативный моноид от множества переменных x_i^θ , где $1 \leq i \leq n$ и $\theta \in \Theta$. Элементы M назовем также *дифференциальными мономами* в алфавите X . Дифференциальные мономы образуют базис алгебры $R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т.е. любой элемент $a \in R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ однозначно записывается в виде

$$a = \sum_{u \in M} r_u u$$

с конечным числом ненулевых $r_u \in R$.

Для любого $x_i^\theta \in X^\Theta$ положим

$$\deg(x_i^\theta) = 1, \quad d(x_i^\theta) = |\theta|.$$

где $1 \leq i \leq n$. Если $u = a_1 \dots a_s \in M$, где $a_1, \dots, a_s \in X^\Theta$, то положим

$$\deg(u) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_s), \quad d(u) = d(a_1) + \dots + d(a_s),$$

т.е. через $\deg(u)$ обозначим стандартную функцию степени монома u по переменным x_1, \dots, x_n , а через $d(u)$ обозначим дифференциальную степень монома u по дифференцированиям $\delta_1, \dots, \delta_m$.

3. БАЗИС СВОБОДНЫХ АЛГЕБР НОВИКОВА

Пусть $k\{x_1, \dots, x_n\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над полем k характеристики 0 от переменных x_1, \dots, x_n с одним дифференцированием δ . Для удобства записи производные $a^\delta, a^{\delta^2}, a^{\delta^s}$ обозначим через $a', a'', a^{(s)}$, соответственно. Положим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и через X^δ обозначим множество всех символов вида $x_i^{(r)}$, где $1 \leq i \leq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Для любого $x_i^{(r)}, x_j^{(s)} \in X^\delta$ будем считать, что $x_i^{(r)} > x_j^{(s)}$, если $i > j$ или если $i = j$, $r > s$. Множество M всех дифференциальных мономов вида

$$u = x_{i_1}^{(s_1)} x_{i_2}^{(s_2)} \dots x_{i_t}^{(s_t)},$$

где $t \geq 0$, $x_{i_j}^{(s_j)} \in X^\delta$ для всех $1 \leq j \leq t$ и $x_{i_1}^{(s_1)} \geq x_{i_2}^{(s_2)} \geq \dots \geq x_{i_t}^{(s_t)}$, образует линейный базис алгебры $k\{x_1, \dots, x_n\}$.

На дифференциальной алгебре введем новую операцию \circ полагая

$$f \circ g = fg', \quad f, g \in k\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Легко проверить, что алгебра дифференциальных многочленов $k\{x_1, \dots, x_n\}$ с новой операцией \circ становится алгеброй Новикова. Через $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ обозначим подалгебру этой алгебры порожденную элементами x_1, \dots, x_n . В [15] доказано, что в случае полей нулевой характеристики $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных x_1, \dots, x_n без единицы.

Опишем структуру пространства $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ в терминах дифференциальных мономов.

Предложение 1. *Множество всех дифференциальных мономов $u \in M$ с условием $\deg(u) - d(u) = 1$ представляет базис свободной алгебры Новикова $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Доказательство. Пусть L – множество всех дифференциальных мономов $u \in M$ с условием $\deg(u) - d(u) = 1$ и V – линейная оболочка L . Если $u, v \in L$, то, очевидно, $u \circ v = uv'$ является линейной комбинацией дифференциальных мономов $w \in L$. Следовательно, V является подалгеброй алгебры Новикова $\langle k\{x_1, \dots, x_n\}, \circ \rangle$. Напомним, что $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ подалгебра $\langle k\{x_1, \dots, x_n\}, \circ \rangle$ порожденная элементами x_1, x_2, \dots, x_n . Так как $x_1, x_2, \dots, x_n \in L \subseteq V$, то отсюда непосредственно следует, что $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq V$.

Теперь покажем, что $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle \supseteq V$. Для этого достаточно проверить, что любое $u \in L$ принадлежит $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Если $\deg(u) = 1$, то $u = x_i \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Предположим, что любой дифференциальный моном $v \in L$ с условием $\deg(v) < s$, где $s \geq 2$, принадлежит $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Пусть $u \in L$ и $\deg(u) = s$. Сначала рассмотрим случай, когда найдется i такое, что $x'_i | u$, т.е. $u = u_1 \cdot x'_i$. Тогда $u_1, x_i \in L$. По индуктивному предположению имеем $u_1, x_i \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Так как $u = u_1 \cdot x'_i = u_1 \circ x_i$, то $u \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Допустим, что u не делится ни на какое x'_i . Так как $\deg(u) - d(u) = 1$, то найдутся u_0, v_0 , где $v_0 = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k)}$, такие, что $u = u_0 v_0$. Тогда $\deg(u_0) = \deg(u) - k$, $d(u_0) = d(u) - k$. Следовательно,

$$\deg(u_0) - d(u_0) = \deg(u) - k - (d(u) - k) = \deg(u) - d(u) = 1,$$

т.е. $u_0 \in L$ и по индуктивному предположению $u_0 \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Имеем

$$\begin{aligned} u_0 \circ (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)}) &= u_0 (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)})' \\ &= u_0 \left(\sum_{j=1}^{k-1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x'_{i_j} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)} + v_0 \right) = \sum_{j=1}^{k-1} u_0 x_{i_1} x_{i_2} \dots x'_{i_j} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)} + u. \end{aligned}$$

Так как $u_0 x_{i_1} x_{i_2} \dots x'_{i_j} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)}$ делится на x'_{i_j} , то как было доказано выше, $u_0 x_{i_1} x_{i_2} \dots x'_{i_j} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)} \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Так как $u_0 \circ (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}^{(k-1)}) \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, то отсюда следует, что $u \in N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. \square

Через $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle = k \oplus N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle = N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle^\#$ обозначим алгебру полученную от $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ с формальным присоединением единицы. Тогда $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных x_1, \dots, x_n с единицей. Ниже всюду используется данное представление свободной алгебры $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

4. ПРИМЕР НЕ ТРИАНГУЛИРУЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Дифференцирование d алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$ называется *локально-нильпотентным*, если для каждого $f \in N \langle x, y, z \rangle$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $d^n(f) = 0$. Если d – локально-нильпотентное дифференцирование, то отображение

$$\exp d : N \langle x, y, z \rangle \rightarrow N \langle x, y, z \rangle$$

является автоморфизмом и называется *экспоненциальным автоморфизмом*.

Напомним, что дифференцирование d алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$ вида

$$d = a_1(y, z) \partial_x + a_2(z) \partial_y + a_3 \partial_z,$$

т.е.

$$d(x) = a_1(y, z), \quad d(y) = a_2(z), \quad d(z) = a_3,$$

где $a_1(y, z) \in N \langle y, z \rangle$, $a_2(z) \in N \langle z \rangle$ и $a_3 \in k$, называется *треугольным*. Хорошо известно, что любое треугольное дифференцирование является локально-нильпотентным.

Дифференцирование d алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$ называется *триангулируемым*, если существует автоморфизм алгебры Новикова ϕ такой, что $\phi^{-1} d \phi$ является треугольным.

Пусть $k\{x, y, z\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над полем k характеристики 0 от трех переменных x, y, z с одним дифференцированием δ . Рассмотрим дифференцирование ∂_1 алгебры $k\{x, y, z\}$, определенное правилом

$$\partial_1 : x \mapsto 2y, \quad y \mapsto z, \quad z \mapsto 0.$$

Положим $w = y^2 - xz$. Тогда $\partial_1(w) = 0$. Следовательно, $\partial_1(w'') = (\partial_1(w))'' = 0$. Заметим, что $w'' = 2(y')^2 + 2yy'' - x''z - 2x'z' - xz''$.

Теперь рассмотрим дифференцирование

$$D_1 = \frac{1}{2}w''\partial_1 = (yw'')\partial_x + \left(\frac{1}{2}zw''\right)\partial_y$$

алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y, z\}$. Имеем

$$D_1(w) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(y^2 - xz) = 2y\left(\frac{1}{2}w''z\right) - (w''y)z = 0,$$

и следовательно, $D_1(w'') = (D_1(w))'' = 0$.

Используя эти равенства, прямым вычислением получаем

$$D_1(x) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(x) = yw'', \quad D_1^2(x) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(yw'') = \frac{1}{2}z(w'')^2,$$

$$D_1^3(x) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)\left(\frac{1}{2}z(w'')^2\right) = 0.$$

$$D_1(y) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(y) = \frac{1}{2}zw'', \quad D_1^2(y) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)\left(\frac{1}{2}zw''\right) = 0.$$

$$D_1(z) = \left(\frac{1}{2}w''\partial_1\right)(z) = 0.$$

Следовательно, дифференцирование D_1 является локально-нильпотентным дифференцированием алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y, z\}$.

Рассмотрим алгебру Новикова $\langle k\{x, y, z\}, \circ \rangle$, где $f \circ g = fg'$ для всех $f, g \in k\{x, y, z\}$. Пусть $N \langle x, y, z \rangle = k \oplus N_0 \langle x, y, z \rangle$, где $N_0 \langle x, y, z \rangle$ – подалгебра алгебры Новикова $\langle k\{x, y, z\}, \circ \rangle$, порожденная элементами x, y, z .

Используя операцию \circ запишем дифференцирование D_1 в терминах элементов свободной алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$:

$$D_1 = (yw'')\partial_x + \left(\frac{1}{2}zw''\right)\partial_y = (2y \circ (y \circ y) - y \circ (x \circ z) - y \circ (z \circ x))\partial_x$$

$$+ \frac{1}{2}(2z \circ (y \circ y) - z \circ (x \circ z) - z \circ (z \circ x))\partial_y = (2y \circ w_0)\partial_x + (z \circ w_0)\partial_y,$$

где $w_0 = \frac{1}{2}(2y \circ y - x \circ z - z \circ x)$. Следовательно, дифференцирование D_1 также является дифференцированием свободной алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$.

Теорема 1. *Дифференцирование*

$$D_1 = (2y \circ w_0)\partial_x + (z \circ w_0)\partial_y,$$

где $w_0 = \frac{1}{2}(2y \circ y - x \circ z - z \circ x)$, свободной алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$ от трех переменных x, y, z над полем k характеристики 0 не является триангулируемым.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм

$$\theta : N \langle x, y, z \rangle \rightarrow k[x, y, z],$$

определенный правилом $\theta(x) = x$, $\theta(y) = y$, $\theta(z) = z$. Ядро этого гомоморфизма является идеалом, порожденным всеми коммутаторами и ассоциаторами, т.е. идеалом, порожденным элементами $a \circ b - b \circ a$ и $(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c)$, где $a, b, c \in N \langle x, y, z \rangle$.

Заметим, что

$$(3) \quad \theta(w_0) = w.$$

Используя (3), легко вычислить, что дифференцирование D_1 индуцирует дифференцирование

$$\theta(2y \circ w_0) \partial_x + \theta(z \circ w_0) \partial_y = 2yw \partial_x + zw \partial_y = D.$$

Таким образом, D_1 индуцирует дифференцирование D алгебры многочленов $k[x, y, z]$, определенное в (1). Известно, что дифференцирование D не является триангулируемым [11]. Отсюда следует, что D_1 также не является триангулируемым. \square

5. АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ НОВИКОВА

Автоморфизмы алгебры Новикова $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ вида

$$\sigma(i, \alpha, f) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in k$, $f \in N \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rangle$, называются *элементарными*. Подгруппа группы автоморфизмов алгебры Новикова $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Элементы этой подгруппы называются *ручными автоморфизмами*. Не ручные автоморфизмы называются *дикими*.

Рассмотрим экспоненциал $\psi = \exp D_1$ дифференцирования D_1 из теоремы 1. Имеем

$$\begin{aligned} D_1(w_0) &= (z \circ w_0) \circ y + y \circ (z \circ w_0) - (y \circ w_0) \circ z - z \circ (y \circ w_0) \\ &= (z \circ y) \circ w_0 + y \circ (z \circ w_0) - (y \circ z) \circ w_0 - z \circ (y \circ w_0) = 0. \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\psi(x) = x + 2y \circ w_0 + (z \circ w_0) \circ w_0, \quad \psi(y) = y + z \circ w_0, \quad \psi(z) = z.$$

Теорема 2. *Автоморфизм*

$$\psi = \exp D_1 = (x + 2y \circ w_0 + (z \circ w_0) \circ w_0, y + z \circ w_0, z)$$

свободной алгебры Новикова $N \langle x, y, z \rangle$ от трех переменных x, y, z над полем k характеристики 0 является диким.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм

$$\theta : N \langle x, y, z \rangle \rightarrow k[x, y, z],$$

приведенный в доказательстве теоремы 1. Непосредственные вычисления с использованием (3) дают

$$\theta(\psi(x)) = x + 2yw + zw^2, \quad \theta(\psi(y)) = y + zw, \quad \theta(\psi(z)) = z.$$

Таким образом, ψ индуцирует автоморфизм

$$(x + 2yw + zw^2, y + zw, z),$$

т.е. ψ индуцирует автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $k[x, y, z]$, определенный в (2). Хорошо известно [8], что автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $k[x, y, z]$ является диким. Отсюда следует, что автоморфизм ψ также является диким. \square

REFERENCES

- [1] H.W.E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math., **184** (1942), 161–174. MR0008915
- [2] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde, (3), **1** (1953), 33–41. MR0054574
- [3] A.G. Czerniakiewicz, *Automorphisms of a free associative algebra of rank 2*, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., **160** (1971), 393–401; **171** (1972), 309–315. MR0280549; MR0310021
- [4] L. Makar-Limanov, *The automorphisms of the free algebra of two generators*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **4:3** (1970), 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl., **4** (1970), 262–263. MR0271161
- [5] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, *Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables*, J. Algebra, **322:9** (2009), 3318–3330. MR2567422
- [6] D. Kozybaev, L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras*, Asian-European J. Math., **1:2** (2008), 243–254. MR2431177
- [7] P.M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **14** (1964), 618–632. MR0167504
- [8] U.U. Umirbaev, I.P. Shestakov, *Subalgebras and automorphisms of polynomial rings*, Dokl. Akad. Nauk, **386:6** (2002), 745–748. MR2004473
- [9] U.U. Umirbaev, *Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras and the wild automorphism of free associative algebras*, Dokl. RAN, **407:3** (2006), 319–324. MR2348694
- [10] R. Rentschler, *Operations du groupe additif sur le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, **267** (1968), 384–387. MR0232770
- [11] H. Bass, *A non-triangular action of G_a on A^3* , J. of Pure and Appl. Algebra, **33:1** (1984), 1–5. MR0750225
- [12] M. Nagata, *On the automorphism group of $k[x, y]$* , Kinokuniya, Tokyo: Kyoto Univ. (Lect. in Math.), 1972. MR0337962
- [13] I.M. Gel'fand, I.Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Functional Analysis and Its Application, **13:4** (1979), 248–262. MR0554407
- [14] A.S. Dzhumadil'daev, *Codimension growth and non-koszulity of Novikov operad*, Commun. Alg., **39** (2011), 2943–2952. MR2834140
- [15] A.S. Dzhumadil'daev, C. Lofwall, *Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities*, Homology, Homotopy and Applications, **4:2** (2002), 165–190. MR1918188
- [16] L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz for Novikov algebras*, TWMS J. Pure Appl. Math., **2** (2011), 228–235. MR2884985
- [17] L.A. Bokut, Y. Chen, Z. Zhang, *Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras*, J. Algebra Appl., **16:1** (2017), 1750001-1 – 1750001-22. MR3590862
- [18] B.A. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova, U.U. Umirbaev, *Tame and wild automorphisms of differential polynomial algebras of rank 2* (accepted).
- [19] E.R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*. Pure and Applied Mathematics, New York-London: Academic Press, 1973. MR0568864

BIBINUR DUISENGALIYEVA
 L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY,
 SATPAYEV STREET, 2,
 010000, ASTANA, KAZAKHSTAN
 E-mail address: bibinur.88@mail.ru

UALBAI UMIRBAEV
WAYNE STATE UNIVERSITY,
656 W. KIRBY,
DETROIT, MI 48202, USA
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING,
PUSHKIN STREET, 125,
050000, ALMATY, KAZAKHSTAN
E-mail address: `umirbaev@math.wayne.edu`