

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»**

**PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»**

**2024
Астана**

УДК 001

ББК 72

G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001

ББК 72

G99

ISBN 978-601-7697-07-5

**©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2024**

4. Что такое биссектриса треугольника? https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_20_5.php
(04.04.2024ж қаралды)
5. В.А.Смирнов, Е.А.Тұяқов. Геометрия 7 сынып, Алматы “Мектеп” 2017
Ә.Н.Шыныбеков., Д.Ә.Шыныбеков. Геометрия 7 сынып, Алматы “Атамұра” 2017

УДК 004.94

АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ РЕЛЬЕФА МЕТОДОМ RBF ПРИ РАЗНЫХ ПАРАМЕТРАХ ФОРМЫ

Джунусова Мадина Жумахановна
mako2007@mail.ru

Докторант кафедры «Математическое и компьютерное моделирование» Евразийского
национального университета им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Научный руководитель – Д.Ракишева

Аннотация. В данной статье рассматривается применение метода радиально базисных функций для аппроксимации рельефа дневной поверхности Земли в контексте электрического зондирования. Описывается методика проведения численных экспериментов на модельных задачах, а также результаты тестирования данной аппроксимации на реальных данных. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности и применимости радиально базисных функций для точной аппроксимации дневной поверхности Земли.

Данный подход к моделированию рельефа позволяет учесть разнообразные геометрические особенности поверхности Земли, включая горы, долины, реки и другие элементы ландшафта. Это способствует получению более точных результатов в рамках электрического зондирования и повышает качество моделирования в целом.

Ключевые слова: радиально базисные функции, метод RBF, задача электрического зондирования, интерполяция поверхностей.

Введение

Для аппроксимации трехмерной поверхности с рельефом дневной поверхности важно подходить к выбору метода с учётом требований к численной реализации и точности результатов. Один из таких методов — использование радиально базисных функций (RBF), которые позволяют представить поверхность как комбинацию радиально симметричных функций. Для каждой точки поверхности определяются координаты, нормали и функция, проходящая через заданные точки.

Однако выбор конкретного метода зависит от нескольких факторов. Для сложных рельефов могут потребоваться более продвинутые методы, такие как метод конечных элементов или метод наименьших квадратов. Они обеспечивают более точные результаты, учитывая специфические свойства поверхности.

Подбор метода аппроксимации рельефа зависит от требований и условий задачи. Необходимо найти баланс между точностью и вычислительной сложностью метода. Отличительной чертой метода RBF является использование базисных функций, формируемых из сдвигов радиально симметричной функции. Это отличается от традиционного подхода, где базисные функции не зависят от точек данных и могут приводить к сингулярным системам уравнений. Этот метод впервые использовал Р.Л.Харди [1]. В статье [2] было предложено и успешно применено использование радиальных базисных функций для приближения поверхностей в многомерном пространстве.

Материалы и методы

Общая идея метода расписана и была применена в работе [3-6]. Для выполнения интерполяции выбирается набор базисных функций $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$ таким образом, чтобы линейная комбинация этих функций удовлетворяла условию интерполяции. Искомая функция $f(x)$ ищется в виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x).$$

Следовательно, в узлах сетки выполняется равенство

$$f(x_i) = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Метод RBF (Radial Basis Function) использует интерполяционные члены для построения системы линейных уравнений, которые определяют коэффициенты λ_i . Интерполяционная функция методе RBF дается следующим образом

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(|x - x_i|)$$

задается радиальная функция $\phi(r)$, которая зависит только от расстояния между точками x и x_i . Эта функция позволяет аппроксимировать данные и построить интерполирующую поверхность, соответствующую заданной точке. По сути, метод RBF находит наилучшие коэффициенты, которые оптимально интерполируют данные, и основывается на наборе линейных уравнений, заданных условиями интерполяции. Выбор радиальной функции $\phi(r)$ определяет, насколько быстро значение функции уменьшается с расстоянием, что влияет на качество интерполяции.

На основе [1], в качестве радиальных функций $\phi(r)$ применялись следующие функции: Гауссиан $\phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, линейная r , кубическая r^3 , обратная к квадратичной $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$, пропорциональная корню из квадратичной $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ и обратная к корню из квадратичной $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$ [1]-[6].

Коэффициенты λ_i определяются из системы линейных уравнений, полученных из интерполяции (1). Эта система представляет собой симметричную матрицу

$$A\lambda = f, \quad (2)$$

где элементы матрицы A заданы в виде:

$$A_{i,j} = \phi(|x_i - x_j|),$$

Это важное свойство метода RBF.

Приведенное выше уравнение описывает метод RBF для интерполяции поверхностей в трехмерном случае. Для заданного набора из n точек на Oxy плоскостях и соответствующих значений $f(x, y)$ строится интерполяционная функция $s(x, y)$, которая является линейной комбинацией радиальных функций ϕ [6]

$$s(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|(x, y) - x_i\|). \quad (3)$$

Коэффициенты λ_i определяются из системы линейных уравнений, аппроксимирующих условия интерполяции. В результате такой аппроксимации поверхность может быть описана аналитическими выражениями, что делает метод RBF простым и эффективным методом решения задач интерполяции.

Простая форма метода делает его очень удобным для реализации. Аппроксимация, полученная с помощью радиальных базисных функций, позволяет получить единое аналитическое выражение для описания формы поверхности, как это описано в источниках [6-15].

Результаты исследования и обсуждение.

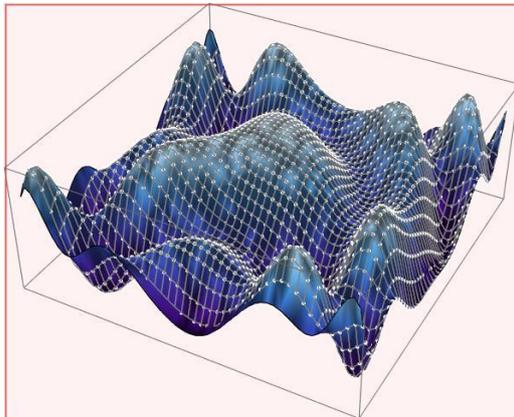
С помощью предложенного метода было проведено несколько численных экспериментов на модельной задаче и построены графики интерполяционных функций.

Для точек (kh, lh) , где k и l находятся в интервале $(k = \overline{-25, 25}, l = \overline{-25, 25})$, в качестве модельной задачи для аппроксимации трехмерной поверхности была выбрана следующая функция: $\cos(x + y^2) \cdot \cos(x^2 + y)$.

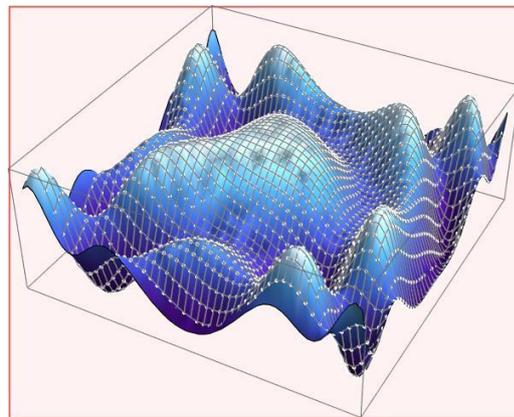
Для проверки результатов оценивалось максимальное отклонение от интерполирующей функции в узлах для каждой радиальной базисной функции. Это отклонение принимается за Δ , а Δ вычисляется как максимальная разность $\Delta = \max |RBF(\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}) - z_i|$ для всех узлов с $1 \leq i$

$\leq n$. Применялась формула метода RBF из [6-15].

На графике представлены численные результаты для заданного шага $h = 0.1$, значений $m = 25, n = (m + 1)^2$ и параметра формы $\varepsilon = 1.0$.



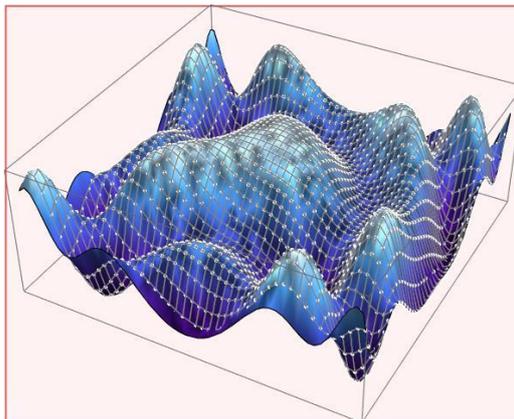
а – $\phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2), \Delta = 0.00306382$



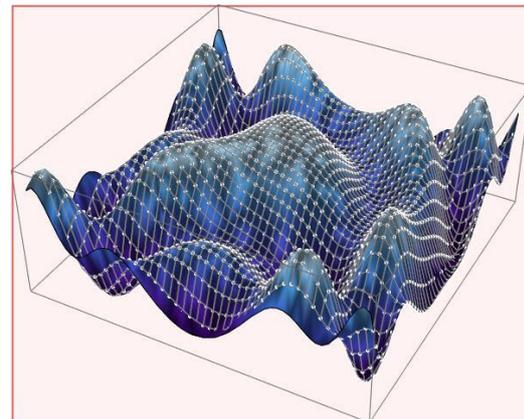
б – $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}, \Delta = 8.4313 \times 10^{-8}$

Рисунок 1 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – Гауссиан; б – Обратная к квадратичной



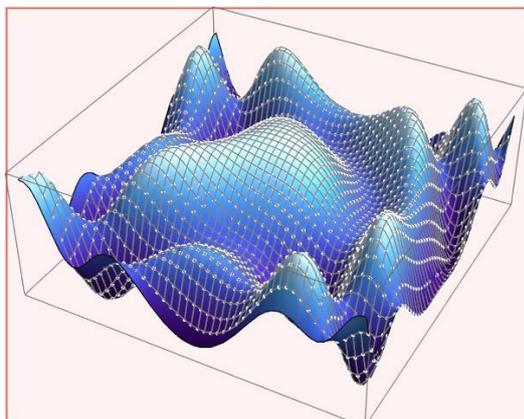
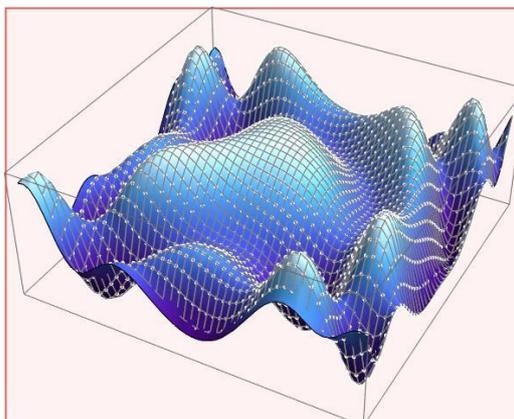
а – $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}, \Delta = 3.39005 \times 10^{-7}$



б – $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}, \Delta = 5.76741 \times 10^{-6}$

Рисунок 2 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – Обратная к корню из квадратичной; б – пропорциональная корню из квадратичной;



$$a - r, \Delta = 1.49672 \times 10^{-13}$$

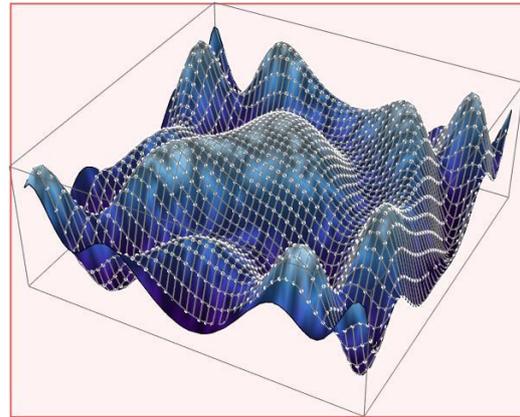
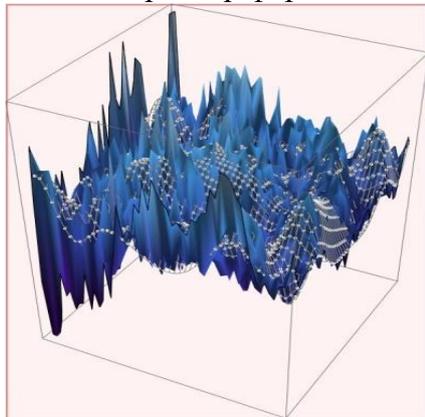
$$б - r^3, \Delta = 7.76012 \times 10^{-11}$$

Рисунок 3 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – линейная; б – кубическая;

На рисунках 1 а) и 2 а), б) можно увидеть интенсивность окраски, что является следствием влияния плохой обусловленности матриц А для функций $\phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$. Выбор радиальных функций $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$, r , r^3 является удачным, так как эти функции обладают свойством гладкости и хорошей обусловленности соответствующих матриц. Это позволяет создавать интерполирующую функцию $s(x,y)$, которая будет иметь плавные переходы и хорошо аппроксимировать исходные данные.

По аналогической схеме продолжим аппроксимировать с помощью радиальных базисных функций при значений параметр формы $\varepsilon = 0.5$.

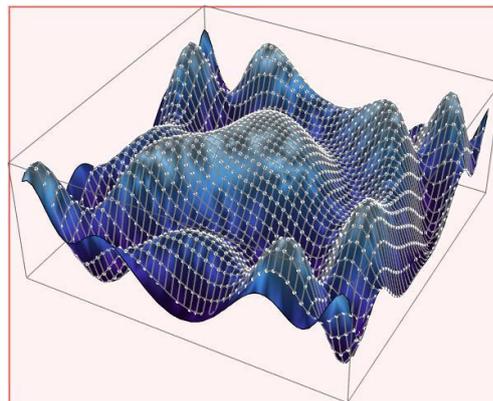
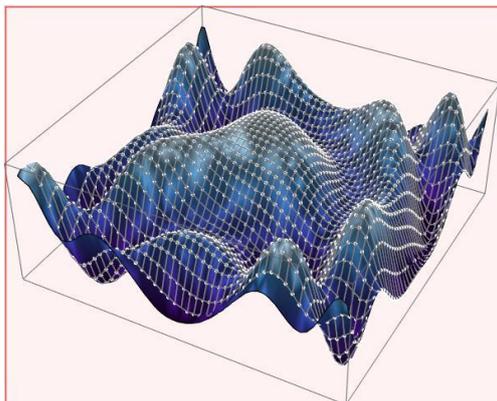


$$a - \phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2), \Delta = 1.89943$$

$$б - \phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}, \Delta = 0.0003506467$$

Рисунок 4 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – Гауссиан; б – Обратная к квадратичной

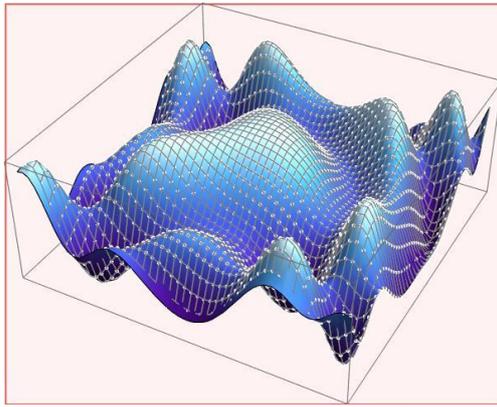


$$a - \phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}, \Delta = 0.0024802$$

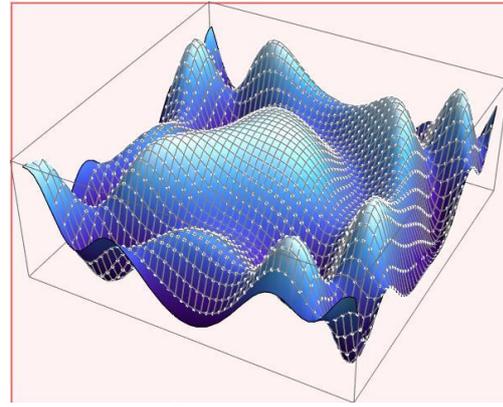
$$б - \phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}, \Delta = 0.00360801$$

Рисунок 5 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – Обратная к корню из квадратичной; б – пропорциональная корню из квадратичной;



а – r , $\Delta = 1.49672 \times 10^{-13}$



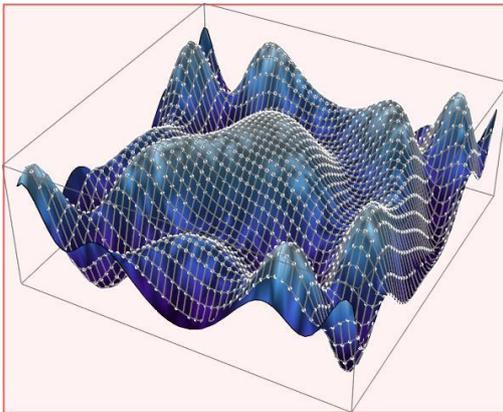
б – r^3 , $\Delta = 7.76012 \times 10^{-11}$

Рисунок 6 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

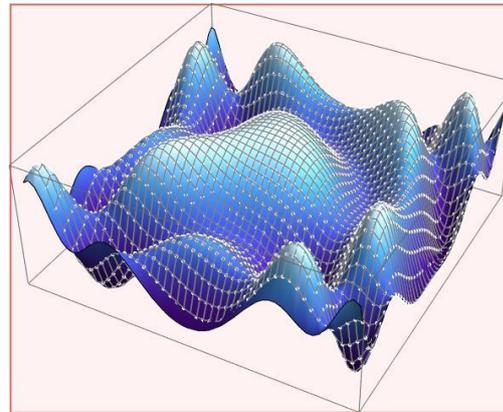
а – линейная; б – кубическая;

По результату линейного решения рисунка 4 а) плохо обусловленной матрицы содержат значащие числовые ошибки. Следствия влияния плохой обусловленности матриц A можно увидеть по интенсивности окраски для функций $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$, $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ на рисунках 4 б), 5 а), б). Функции r и r^3 являются удачными и обладают свойством гладкости интерполирующей функции $s(x, y)$, что обеспечивает хорошую обусловленность соответствующих матриц.

Для функции $\cos(x + y^2) \cdot \cos(x^2 + y)$ при значений $\varepsilon = 1.5$ программа выдала результаты, показанные на рисунках 13-15.



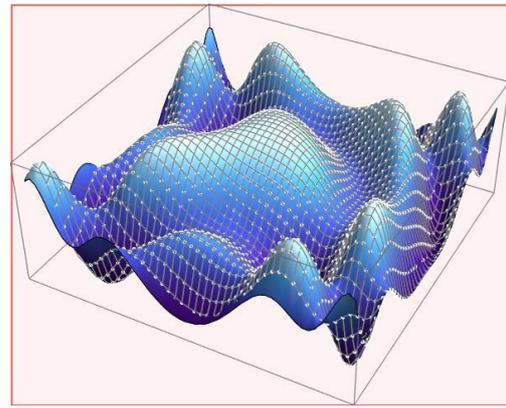
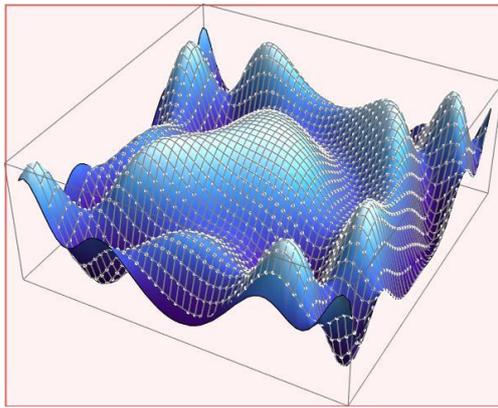
а – $\phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\Delta = 0.0000226627$



б – $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$, $\Delta = 3.25748 \times 10^{-11}$

Рисунок 7 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

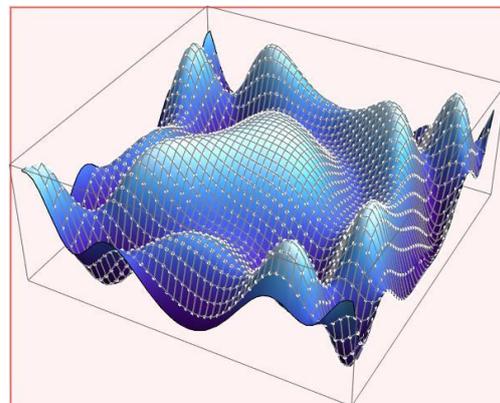
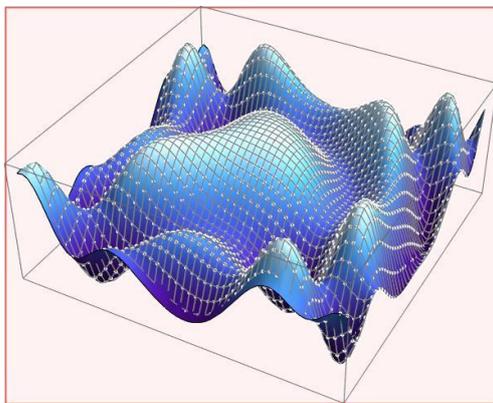
а – Гауссиан; б – Обратная к квадратичной



а – $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\Delta = 1.1843 \times 10^{-10}$ б – $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$, $\Delta = 7.82322 \times 10^{-9}$

Рисунок 8 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – Обратная к корню из квадратичной; б – пропорциональная корню из квадратичной;



а – r , $\Delta = 1.49672 \times 10^{-13}$

б – r^3 , $\Delta = 7.76012 \times 10^{-11}$

Рисунок 9 – Аппроксимация при помощи радиальных базисных функций:

а – линейная; б – кубическая;

Из рисунков можно увидеть интенсивность окраски только на рисунке 7 а) для функции $\phi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, что есть является следствием влияния плохой обусловленности матриц А. Выбор радиальных функций, таких как функции $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$, $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\phi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$, r , r^3 является удачным (см. рисунки 7 б), 8 а), б), 9 а), б)). Здесь гладкость интерполирующей функции $s(x,y)$ обеспечивает хорошую обусловленность соответствующих матриц. В результате такого выбора радиальных функций и гладкой интерполяции получается высокое качество интерполированных данных. Это означает, что значения, восстановленные при помощи этих функций, будут хорошо соответствовать исходным данным, а сама интерполяционная процедура будет устойчивой и надежной [6-15].

Заключение

Разработан алгоритм автоматического построения адаптивных сеток с использованием метода радиальных базисных функций. Алгоритм используется для аппроксимации рельефа дневной поверхности с учетом геометрии измерительной установки. Проведены численные эксперименты по аппроксимации модельной адачи для различных значений параметра формы ε . Верификация полученных результатов показывает, что применение радиальных базисных функций является эффективным. Успех был достигнут и для значений $\varepsilon < 1$ именно функция Гауссиан дает значительные числовые ошибки, при значени, параметров форм $\varepsilon > 1$, как

показано в приведенной выше программе функций. На практике при построении интерполирующих функций для аппроксимации рельефа методом RBF можно выбрать подходящие радиальные функции. Это позволяет регулировать гладкость профиля поверхности в зависимости от требований задачи, например, при решении задачи электрического зондирования постоянным током с помощью интегральных уравнений.

Список литературы

- 1 Grady B. Wright Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical Developments // Doctoral Dissertation. – Colorado, 2003. – 155 p.
- 2 Broomhead D.H., Lowe David Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks // Complex Systems. – 1988. – N 2. – P. 321-335.
- 3 Michael Mongillo Choosing Basis Functions and Shape Parameters for Radial Basis Function Methods. – October 25, 2011. – URL: <https://www.siam.org/students/siuro/vol4/S01084.pdf>
- 4 Xin Yin, Weiwei Xu, Ryo Akama and Hiromi T.Tanaka A Synthesis of 3-D Kabuki Face from Ancient 2-D Images Using Multilevel Radial Basis Function. – URL: <http://www.art-science.org/journal/v7n1/v7n1pp14/artsci-v7n1pp14.pdf>
- 5 Nail A. Gumerov, Ramani Duraiswami Fast Radial Basis Function interpolation via preconditioned Krylov Iteration. – URL: <http://www.umiacs.umd.edu/~ramani/pubs/GumerovDuraiswamiIterativeRBF06.pdf>
- 6 Д. С. Ракишева, Т. Миргаликызы, Б. Г. Муканова. Аппроксимация поверхности рельефа дневной поверхности методом RBF // Вестник НАН РК – 2017 - №1. – С. 210-215
- 7 Д. С. Ракишева, Б. Г. Муканова, Т. Миргаликызы. Modeling the influence of Ground Surface Relief on Electric Sounding Curves Using the Integral Equations Method // Hindawi Mathematical Problems in Engineering Volume 2017, Article ID 9079475 / WoS. – URL: <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000407253300001>
- 8 Д.С. Ракишева, Б.Г. Муканова, И. Модин. Simulation of electrical monitoring of dams with leakage transverse with a transverse placement of the measuring installation. // Eurasian journal of mathematical and computer applications. ISSN 2306-6172 Volume 8, Issue 4 (2020) 69 – 82/WoS.
- 9 Д.С. Ракишева, Б.Г. Муканова. Метод интегральных уравнений для рельефной вмещающей среды с 2D локальным включением. // Вестник ЕНУ имени Л.Н.Гумилева / №4 (129) 2019. С 56-67.
- 10 Д.С. Ракишева, Б.Г. Муканова, И. Модин. Mapes of secondary sources in the problem of ERT probing 2D medium: numerical method and analytical solutions. // Вестник Карагандинского университета / №2 (98) 2020. С 204-214 / WoS.
- 11 Д.С. Ракишева, Б.Г. Муканова. The Method of the Integral Equations and Fourier transforms for the problems of Modeling the electrical monitoring of dams and barriers. // International Journal of Mathematics and Physics 11, №1, 4 (2020) С 4-12.
- 12 Д.С. Ракишева, Б.Г. Муканова. Fourier transformation method for solving integral equation in the 2.5D problem of electric sounding. // XI – Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных некорректных задач» С. 62 /2019 Новосибирск, Академгородок.
- 13 Д. С. Ракишева, Т. Миргаликызы, Б. Г. Муканова. Моделирование влияния рельефа земной поверхности на кривые электрического зондирования методом интегральных уравнений. // Материалы II международной научной конференции «Информатика и прикладная математика» 2017, часть-2, С. 352-366. г.Алматы.
- 14 Д. С. Ракишева. Применение метода преобразования Фурье для решения интегрального уравнения в задаче электрического зондирования рельефа дневной поверхности. // Материалы XIV международной научной конференции «Наука и образование - 2019» 2019г, С. 1454-1460, г.Нур-Султан.
- 15 Д. С. Ракишева, С. Даукен. Аппроксимация рельефа объекта «Косая Гора» методом RBF. // Материалы XV международной научной конференции «Наука и образование - 2020» 2020г, С. 1537-1544, г.Нур-Султан.