

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»**

**PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«GYLYM JÁNE BILIM - 2024»**

**2024
Астана**

УДК 001

ББК 72

G99

«GYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «GYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001

ББК 72

G99

ISBN 978-601-7697-07-5

**©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2024**

СЕКЦИЯ 4 МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПОДСЕКЦИЯ 4.1 МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

ЛОГАРИФМДІК ЕРЕКШЕЛІГІ БАР ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ШЕНЕЛІМДІГІ

Абибулла Мадина Ермуханбетқызы

madinaabibulla616@gmail.com

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті магистранты, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі: ф.-м.ғ.к., PhD, доцент Абылаева А.М.

Аннотация. Біз бөлшек интегралды операторлардың жалпы класының шенелімдігі мен компактылығының сипаттамаларын орнатамыз. Бұл нәтижелер Харди типтегі теңсіздіктер теориясындағы жаңа нәтижелерді білдіреді.

Тірек сөздер: теңсіздіктер; Харди типті теңсіздіктер; бөлшек интегралдық оператор.

Айталық $1 < p, q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ және $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ болсын. u және v – $I = (a, b)$ ($0 \leq a < b \leq \infty$) аралығында локальді интегралданатын, теріс емес функциялар. Нормасы келесідей түрде анықталатын, I аралығындағы барлық f өлшемді функцияларының кеңістігін $L_{p,v} \equiv L_p(v, I)$ арқылы белгілейік:

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_0^\infty v(t) |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Айталық W – I аралығында өспелі, локальді абсолютті үзіліссіз және оң мән қабылдайтын функция болсын. Сонымен қатар, кез келген $x \in I$ үшін $\frac{dW(x)}{dx} = w(x)$.

Біз бұл жұмысымызда келесі түрдей анықталатын $T_{\alpha,\beta}$ операторын қарастырамыз:

$$T_{\alpha,\beta} f(x) = \int_0^x \frac{\left(\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right)^\beta W^\gamma(s) u(s) f(s) w(s) ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I \quad (1)$$

мұндағы, $\alpha > 0$ және $\beta \geq 0$.

Ары қарай W функциясын I аралығында теріс емес және $\lim_{x \rightarrow 0+} W(x) = 0$ болсын дейік. Қазіргі таңда көптеген әлемдік математиктердің жұмыстарында интегралдық операторлар үшін Хардитеңсіздіктерінің параметрлері мен салмақты функциялары әртүрлі жағдайларына байланысты болғандағы түрлері қарқынды түрде зерттеліп жатыр. Харди типті теңсіздіктер математика және математикалық физиканың әртүрлі салаларында маңызды қолданысқа ие.

Сонымен қатар, интералдық және дифференциалдық теңдеулер теориясында, сызықтық емес анализде, ерекшеліктері бар шекаралық есептерді зерттеуде қолданылады.

Бөлшек интегралды оператордың $0 < p, q < \infty, \alpha > \frac{1}{p}$ және $1 < p \leq q < \infty$ жағдайындағы шенелімдігі мен компакттылығына қатысты нәтижелер [1] еңбегінде берілген. Ал бөлшек интегралды оператордың кемімелі функция үшін $1 < p \leq q < \infty$ жағдайындағы шенелімдігі мен компакттылығының критерийлері [2] еңбекте алынған. Параметрлері дәл осы шарттарды қанағаттандыратын дуал оператор үшін алынған нәтижелер [3] еңбекте көрсетілген.

Келесідей $L_{p,w}$ кеңістігін $L_{q,v}$ кеңістігіне бейнелейтін Харди операторын қарастырайық:

$$H_{\alpha,\beta} f(x) = W^{\alpha-\beta-1}(x) \int_0^x u(s) W^{\beta+\gamma}(s) f(s) w(s) ds, \quad x \in I$$

мұндағы $W(x)$ - I аралығында теріс емес өлшемді функция.

Енді $x > s \geq 0$ жағдайындағы $\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ функциясының қасиеттерін қарастырайық:

$$\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} = \int_0^x \frac{w(s) ds}{W(x)-W(s)}$$

болады, сәйкесінше келесі теңсіздік орындалады:

$$\frac{W(s)}{W(x)-W(s)} > \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} = \int_0^x \frac{w(s) ds}{W(x)-W(s)} > \frac{W(s)}{W(x)}, \quad x > s \geq 0.$$

$\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ функциясы $x > s > 0$ жағдайында x айнымалысы бойынша кемімелі, ал s айнымалысына қатысты өспелі функция болады. Сондай-ақ, $\frac{1}{W(s)} \ln \left(\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right), W(x) \ln \left(\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right)$ функциялары x айнымалысы бойынша кемімелі және s айнымалысы бойынша өспелі болады.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(W(x) \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right) = \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} - \frac{W(s)}{W(x)-W(s)} < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{W(s)} \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right) > 0.$$

Сонымен, $f \geq 0$ функциясы үшін

$$\int_0^x \frac{\left(\ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} \right)^\beta W^\gamma(s) u(s) f(s) w(s) ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \geq W^{\alpha-\beta-1}(x) \int_0^x u(s) W^{\beta+\gamma}(s) f(s) w(s) ds = H_{\alpha,\beta} f(x)$$

теңсіздігі орындалады және

$$T_{\alpha,\beta} f(x) \geq H_{\alpha,\beta} f(x), \quad x \in I.$$

Нәтижесінде келес теорема туындайды:

Теорема A.1 $1 < p \leq q < \infty$ болсын, онда $H_{\alpha,\beta}$ Харди типті операторы $L_{p,w}$ кеңістігі-нен $L_{q,v}$ кеңістігіне шенелген болады, сонда тек сонда ғана егер $K_{\alpha,\beta} = \sup_{z \in I} K_{\alpha,\beta}(z) < \infty$ болса. Мұндағы:

$$K_{\alpha,\beta}(z) = \left(\int_a^z W^{q(\alpha-\beta-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^b u^{p'}(s) W^{p'(\beta+\gamma)}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сонымен қатар, $\|H_{\alpha,\beta}\| \approx K_{\alpha,\beta}$ болады.

Теорема 1. Айталық $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$, $\beta \geq 0$ және $\gamma \geq 0$ болсын. u функциясы I аралығында кемімелі функция. Онда (1) формула бойынша анықталатын $T_{\alpha,\beta}$ операторы $L_{p,w}$ -дан $L_{q,v}$ -ға шенелген болады сонда тек сонда ғана, егер

$$A_{\alpha,\beta} = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty v(x) W^{q(\alpha-\beta-1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t W^{(\beta+\gamma)p'}(s) u^{p'}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болса. Сонымен қатар, $\|T_{\alpha,\beta}\| \approx A_{\alpha,\beta}$. Мұндағы $\|T_{\alpha,\beta}\|$ -(1) операторының $L_{p,w}$ -дан $L_{q,v}$ -ге дейінгі нормасы.

Теорема 2. Айталық $0 < \alpha < 1$, $0 < q < p < \infty$, $p > \frac{1}{\alpha}$, $\beta \geq 0$ және $\gamma \geq 0$ болсын. u функциясы I аралығында кемімелі функция. Онда (1) формула бойынша анықталатын $T_{\alpha,\beta}$ операторы $L_{p,w}$ -дан $L_{q,v}$ -ға шенелген болады сонда тек сонда ғана, егер

$$B_{\alpha,\beta} = \left(\left(\int_t^\infty v(x) W^{q(\alpha-\beta-1)}(x) dx \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\int_0^t W^{(\beta+\gamma)p'}(s) u^{p'}(s) w(s) ds \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} W^{q(\alpha-\beta-1)}(t) v(t) dt \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

болса. Сонымен қатар, $\|T_{\alpha,\beta}\| \approx B_{\alpha,\beta}$. Мұндағы $\|T_{\alpha,\beta}\|$ -(1) операторының $L_{p,w}$ -дан $L_{q,v}$ -ге дейінгі нормасы.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. A.M.Abylayeva, R.Oinarov, L.E.Persson, Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators. J. Inequal. Appl. 2016, 324 (2016)
2. A.M.Abylayeva, R.Oinarov, B.Seilbekov, Boundedness and compactness of a class of integral operators with power and logarithmic singularity when $p \leq q$. J. Inequal. Appl. 2022, 23 (2022)
3. A.M.Abylayeva, Boundedness, compactness for a class of fractional integral operators of Weyl type. EurasianMath. J. 7(1), 9–27 (2016)