УДК 524.83, 524.82

О НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ В $F(R,T)$ ГРАВИТАЦИИ С ФЕРМИОННЫМИ ПОЛЯМИ

Әшім Халида
qalida86@mail.ru
Магистрант Физико-технического факультета, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Е.М. Мырзакулов

В современной космологии для описания ускоренного расширения Вселенной наряду с ΛCDM моделью имеются и другие альтернативные модели, такие как k-эссенция, f-эссенция, g-эссенция, $f(R)$ гравитация, $f(T)$ гравитация, $f(R,T)$ гравитация и другие модели.

В данной работе нами была исследована модель плоской и однородной Вселенной в теории $f(R,T)$ гравитации с f-эссенцией. Получены соответствующие полевые уравнения. Аналитическим методом было получено решение для масштабного фактора a зависящего от времени t. Из этих полученных решении видно, что полученное решение соответствует поздней стадии ускоренного расширения Вселенной, и не противоречит современным астрономическим наблюдательным данным.

Ключевые слова: Уравнения движения, масштабный фактор, фермионное поле, модифицированные теории гравитации, ускоренное расширение Вселенной.

В глобальном масштабе наиболее приемлемой теорией эволюции Вселенной несомненно является, общая теория относительности (ОТО), которая предполагает, что Вселенная первоначально была сконденсирована в более жарком и плотном состоянии с очень маленьким объемом и расширилась до всего, что мы можем наблюдать в космическом пространстве. Кроме того, до сегодняшнего дня с начального этапа расширение является непрерывным процесом. Ускоренное расширение Вселенной экспериментально доказывается выполнением закона Хаббла и другими методами [1,2]. Это теоретическое явление ученые смогли предсказать и обосновать используя ОТО, однородность и изотропность Вселенной. В последние годы в современной космологии применяются различные модифицированные обобщенные неэйнштейновские теории гравитации. Некоторыми из таких теорий являются $f(R)$ $f(T)$, $f(R,T)$ и $f(T,B)$ гравитации, которые рассматриваются в работе [3].

К другим модифицированным моделям можно отнести модификации компонентов материи, такие как k-эссенция, квинтесенция, фантомная модель, модель Хорндески, модели с векторными и спинорными полями, f-эссенция g-эссенция [4,5]. В данной работе нами будет расмотрена модель $f(R,T)$ гравитации. Ранее в работе [6] была расмотрена модель плоской Вселенной в рамках модифицированной теории $f(R,T)$ гравитации, где действие выглядит следующим образом:

$$S=\frac{1}{k}\int d^4(x) f(R,T)+S_m, \tag{1}$$

где $f(R,T)$ является некой функцией от тензора кривизны R и скаляра кручения T.

Таким образом мы задали действие для исследуемой модели. В следующих разделах для данной модели будут определены уравнения движения и найден параметр уравнения состояния.

Действие и уравнения движения $f(R,T)$ гравитации с f-эссенцией

В этом разделе нами будет расмотрена модель однородной Вселенной в $f(R,T)$ гравитации, где гравитационное поле неминимально взаимодействует с фермионным полем имеющим неканонический кинетический член. Действие в $f(R,T)$ гравитации с f-эссенцией можно записать как

$$S=\int d^4(x) e\left[h(u) f(R,T)+2K(Y,u)\right], \tag{2}$$

где $e=\sqrt{-g}$ явлется определителем тетрады e^a_μ, $f(R,T)$ является некой функцией от тензора кривизны R и скаляра кручения T, $h(\psi,\overline{\psi})$ является некоторой функцией связывающей гравитационное поле с фермионным полем и $K(Y,u)$ является лагранжианом f-эссенции.

Здесь

$$Y=\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi-\left(D_\mu\overline{\psi}\right)\Gamma^\mu\psi\right],$$

является кинетическим членом скалярного поля и здесь дифференциальный оператор D_μ является ковариантной производной и $\Gamma^\mu=e^\mu_a\gamma^a$.

Совместно с действием (2) рассмотрим метрику Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2=-dt^2+a(t)^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right), \tag{3}$$

где a-масштабный фактор зависящий от времени t. Эта метрика хорошо согласуется с современными астрономическими наблюдательными данными. Для этой метрики скаляр кручения T, тензор кривизны R и кинетический член фермионного поля Y принимают следующие значения

$$\sqrt{-g}=a^3,\ R=6\left(\frac{\ddot a}{a}+\frac{\dot a^2}{a^2}\right),\ T=6\frac{\dot a^2}{a^2},\ Y=\frac{i}{2}\left(\bar\psi\gamma^0\dot\psi-\dot{\bar\psi}\gamma^0\psi\right).$$

Здесь и далее точка над буквой обозначает производную по времени t. Лагранжиан для метрики (3) можно записать в виде

$$L=a^3h\left(F-RF_R-TF_T\right)+6\dot a^2ah\left(F_T-F_R\right)-6\dot aa^2\dot hF_R-6\dot aa^2h\left(\dot RF_{RR}+\dot TF_{RT}\right)+2a^3K. \tag{4}$$

Делее, для определения полевых уравнений нами будут использованы уравнения Эйлера-Лагранжа и условие нулевой энергии

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=0,$$

$$E=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i-L=0,$$

где величины q_i и $\dot q_i$ являются обобщеными координатами и скоростями, зависящие от параметров $a,R,T,\psi,\bar\psi$ и их производных. Тогда для метрики (3), получаем следующие полевые уравнения

$$3\frac{\dot a}{a}\left(\dot Rf_{RR}+\dot Tf_{RT}\right)+\left(3\frac{\dot a^2}{a^2}+3\frac{\dot a}{a}\frac{\dot h}{h}-\frac{1}{2}R\right)f_R-\left(3\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{1}{2}T\right)f_T+\frac{1}{2}f-\frac{1}{h}\left(K_YY-K\right)=0. \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\dot R^2f_{RRR}+\dot R\dot Tf_{RRT}+\dot R\dot Tf_{RTR}+\dot T^2f_{RTT}+\left(2\frac{\dot a}{a}\dot R+2\frac{\dot h}{h}\dot R+\ddot R\right)f_{RR}\\&+\left(2\frac{\dot a}{a}\dot T+2\frac{\dot h}{h}\dot T+\ddot T\right)f_{RT}+2\frac{\dot a}{a}\dot Rf_{TR}-4\frac{\dot a}{a}\dot Tf_{TT}+\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+2\frac{\ddot a}{a}+2\frac{\dot a}{a}\frac{\dot h}{h}+2\frac{\ddot h}{h}-\frac{1}{2}R\right)f_R\\&-\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+2\frac{\ddot a}{a}+2\frac{\dot a}{a}\frac{\dot h}{h}+\frac{1}{2}T\right)f_T+\frac{1}{2}f+\frac{1}{h}K=0,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\left(R-6\frac{\dot a^2}{a^2}-6\frac{\ddot a}{a}\right)f_{RR}+\left(T-6\frac{\dot a^2}{a^2}\right)f_{TR}+6\frac{\dot a}{a}\dot T\left(f_{RTR}-f_{RRT}\right)=0, \tag{7}$$

$$\left(R-6\frac{\dot a^2}{a^2}-6\frac{\ddot a}{a}\right)f_{RT}+\left(T-6\frac{\dot a^2}{a^2}\right)f_{TT}+6\frac{\dot a}{a}\dot R\left(f_{RRT}-f_{RTR}\right)=0, \tag{8}$$

Здесь спинорное поле зависит только от времени t, т.е. $\psi=\psi(t)$. Уравнения Эйлера-Лагранжа для ψ и $\bar\psi$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&K_Y\overline{\psi}+\frac{1}{2}\left(3HK_Y+\dot{K}_Y\right)\overline{\psi}+iK_u\overline{\psi}\gamma^0\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(R-6\frac{\dot{a}^2}{a^2}-6\frac{\ddot{a}}{a}\right)f_R-\left(T-6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_T-f\right]h'\overline{\psi}\gamma^0=0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_Y\dot{\psi}+\frac{1}{2}\left(3HK_Y+\dot{K}_Y\right)\psi-iK_u\psi\gamma^0\\
&+\frac{1}{2}\left[\left(R-6\frac{\dot{a}^2}{a^2}-6\frac{\ddot{a}}{a}\right)f_R-\left(T-6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)f_T-f\right]h'\psi\gamma^0=0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $H=\frac{\dot{a}}{a}$ обозначает параметр Хаббла, а штрих обозначает производную по u соответственно.

Очень трудно найти решение для уравнений (5)-(10), поскольку они являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Чтобы решить уравнения поля, мы должны определить форму функции связи и потенциальную плотность теории. Для их решения необходимо определить значения функции $h(u)$, $K(Y,u)$ и $F(R,T)$. Далее в нашей работе нами будут определены значения этих функции и исследована зависимость масштабного фактора a от времени t. Полученные космологические решения будут сравнены с современными астрономическими данными.

Космологические решения

Для решения системы уравнения (5)-(8) здесь рассмотрим частный случае

$$
f(R,T)=\alpha T+\beta T^2+R, \tag{11}
$$

где

$$
f_R=1, f_{RR}=0, f_T=\alpha+2\beta T, f_{TT}=2\beta,
$$

И частные решения для функции связи h и Лагранжиан f -эссенции, как

$$
h=h_0u^n, K=Y-V, V=V_0u^2. \tag{12}
$$

Тогда подставляя решения (11) и (12) у уравнение движения (5), получим

$$
3\frac{\dot{a}^2}{a^2}+3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{h}}{h}-\frac{1}{2}R-\left(3\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{1}{2}T\right)(\alpha+2\beta T)+\frac{1}{2}\left(\alpha T+\beta T^2+R\right)-\frac{V_0}{h_0}u^{1-n}=0. \tag{13}
$$

Учитывая, что $R=6\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), T=6\frac{\dot{a}^2}{a^2}$ и $u=\frac{u_0}{a^3}$ уравнение (13) окончательно примет вид

$$
6\beta\dot{a}^4-(\alpha+3n-1)a^2\dot{a}^2-\gamma a^{3n-2}=0, \tag{14}
$$

где $\gamma=\frac{V_0u_0^{2-n}}{3h_0}$, при $n=2$ мы находим

$$a(t)=e^{\left(\frac{a_0\sqrt{\sqrt{\alpha^2+10\alpha+24\beta\gamma+25}+\alpha+5}}{\sqrt{\beta}}+\frac{t\sqrt{\sqrt{\alpha^2+10\alpha+24\beta\gamma+25}+\alpha+5}}{2\sqrt{3}\sqrt{\beta}}\right)} \quad (15)$$

Параметр Хаббла для решения (15) примет вид

$$H=\frac{\sqrt{5+\alpha+\sqrt{25+10\alpha+\alpha^2+24\beta\gamma}}}{2\sqrt{3}\sqrt{\beta}} \quad (16)$$

Тогда, для рассматриваемой модели параметр уравнения состояния примет вид

$$\omega=\frac{p}{\rho}=-1 \quad (17)$$

Это решение соответсвует решению темной энергии, которая описывает современную эпоху эволюции Вселенной.

Заключение

В данной работе нами была исследована модель плоской и однородной Вселенной в теории $F(R,T)$ гравитации с f-эссенцией. Получены соответствующие полевые уравнения. Получены решения для масштабного фактора a, плотности энергии ρ и давления p, а также для параметра уравнения состояния ω. Полученные решения соответствуют поздней стадии ускоренного расширения Вселенной, и не противоречат современным астрономическим наблюдательным данным.

Список использованных источников

1. Perlmutter S. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae // The Astrophysical Journal. 1999. – Vol. 517, №2. P. 565-586.

2. Riess Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // The Astronomical Journal. 1998. – Vol. 116, №3. P. 1009-1038.

3. Myrzakulov R. Accelerating universe from $f(T)$ gravity // The European Physical Journal C. 2011. - Vol. 71, №9. P. 1752.

4. Armendariz-Picon C., Mukhanov V.F., Steinhardt P.J. Essentials of k-essence // Physical Review D. 2010. Vol.63, №10. P. 3510.

5. Bahamonde S., Capozziello S. Noether symmetry approach in $f(T,B)$ teleparallel cosmology // European Physical Journal C. 2017.- Vol.77, №107. P. 253-264.

6. Esmakhanova K., Myrzakulov N., Nugmanova G., Myrzakulov Y., Chechin L., Myrzakulov R. Dark energy in some integrable and nonintegrable FRW cosmological models //International Journal of Modern Physics D. 2011. Vol.20, No12. P. 2419-2446.