РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12th April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2018»
атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2018»

PROCEEDINGS
of the XIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2018»

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96

«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}], ..., L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}].$

Алгебра Ли L называется *разрешимой алгеброй Ли ступени* n, если существует натуральное число n такой, что $L^{(n)} = 0$. Если $L^{(1)} = 0$, то алгебра Ли L называется абелевой, если $L^{(2)} = 0$, то - метабелевой. Ясно, что алгебра Ли размерности 1 является абелевой, а алгебра Ли размерности 2 является метабелевой.

Утверждение 1. *Пусть L – действительная абелева алгебра Ли размерности 1 и x – её базисный элемент. Тогда двумерные матричные представления*

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix}, \; x \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

алгебры Ли L на векторные пространства V и W, соответственно, изоморфны.

Утверждение 2. *Пусть L – двумерная комплексная не абелева алгебра Ли и x, y – ее базисные элементы. Тогда линейное отображение*

$$\varphi(x) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \varphi(y) \mapsto \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются представлением алгебры Ли L на векторное пространство C^2 тогда и только тогда, когда $\beta = -1$.

Утверждение 3. *Пусть L – двумерная комплексная не абелева алгебра Ли и x, y – её базисные элементы, тогда представление*

$$\varphi(x) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi(y) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

алгебры Ли на векторное пространство C^2 являются изоморфным представлению аджоинт тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0$.

Список использованных источников

1. Erdmann K. Wildon M.J. Introduction to Lie Algebras. – Verlag: Springer, 2006, 251 p.
2. Jacobson N. Lie Algebras. – New York: Dover, 1962, reprinted 1979, 357 p.
3. Bahturin Ju. A. Lectures on Lie algebras. – Berlin: Academie-Verlag, 1978.
4. Humphreys J.E. .Introduction to Lie algebras and Representation Theory.–New York: Springer, 1978.

ӘОЖ 510

ТОЛҚЫН ЖӘНЕ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНЕ ҚОЙЫЛАТЫН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІН ТАБУДЫҢ КЕЙБІР ӘДІСТЕРІ

Алдиярова Жансая Сұлтанбекқызы

ibragim96.15@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А.А. Ибатов

Жартылай осте берілген толқын және жылуөткізгіштік теңдеулеріне қойылатын шекаралық есептерді шешкен кезде көп жағдайда біртекті теңдеулерге қойылатын Коши есебінің шешімдерін пайдаланады. Бірақ бұл әдіс қолданбалы есептерді шешкен кезде ыңғайлы бола бермейді.Кейбір жағдайларда тіпті мүмкін болмай қалады.Сондықтан осындай есептерді шешудің басқа тиімді әдістерін іздестіруге тура келеді.Соңғы уақытта осындай әдістерді іздестіру көбейе бастады. Біз бұл жұмыста сондай әдістердің кейбіреулерін келтіреміз.Жартылай осте берілген бір өлшемді біртекті емес толқын теңдеуіне қойылған шекаралық есепті қарастырайық.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x,t \in D = \{(x,t): x > 0, t > 0\}. \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x),\ \ u_t(x,t)\big|_{t=0} = u_1(x),\ x \ge 0. \qquad (2)$$

бастапқы шарттарын және

$$\left(\alpha u(x,t) + \beta u_x(x,t)\right)\big|_{x=0} = \varphi(t),\ t \ge 0,\ \left(\alpha^2 + \beta^2 \ne 0\right) \qquad (3)$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын $C^{2,2}(D) \cap C^{1,1}\left(\bar{D}\right)$ класында жататын классикалық шешімін табу керек.

Шешімді табу үшін төмендегідей қадамдар жасау керек.

1. Берілген теңдеудің дербес шешімін табу керек, сосын жалпы шешімін жазу керек, яғни

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) + u_{дербес}$$

мұндағы f, g табуды қажет ететін функциялар.

2. f, g функцияларын табу үшін бастапқы шарттарды пайдалану керек. Бастапқы шарттар жарты остің бойында берілгендіктен, яғни $x \ge 0$ болғандықтан $f(x)$ және $g(x)$ функциялары $x \ge 0$ үшін анықталады. Сосын шешім

$$f(x+at) + g(x-at)$$

үшін жазылатындықтан, табылған шешім тек $x + at \ge 0$, $x - at \ge 0,\ x \ge 0$, $t > 0$ облыс үшін орынды. Бұл облысты D_1 деп белгілейік. Бірінші ширектің барлық нүктелерінде $x + at \ge 0$ болғандықтан $f(x+at)$ берілген облыстың барлық жерінде анықталған.Сондықтан $x - at \le 0,\ t > 0,\ x > 0$ облыста $g(x-at)$ функциясын анықтау қажет.

3) $g(x-at)$ функциясын $x - at \le 0,\ t > 0,\ x > 0$ облыста анықтау үшін шекаралық шартты пайдаланамыз. Табылған шешім $D_2 : x + at \ge 0,\ x - at \le 0,\ x \ge 0, t \ge 0$ облысында анықталған болады.

4) Алынған шешімдер D_1 мен D_2 облыстарында әр түрлі формулалар арқылы жазылады - соларды ‛‛желімдеу” керек. Нақтырақ айтқанда тек $g(x-at)$ ‛‛желімдеу” керек, өйткені $f(x+at)$ - жалғыз.

Енді дербес шешімді табуға байланысты тұжырымдарды келтірейік.

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \qquad (4)$$

операторын толқындық оператор деп атайды.

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t) \qquad (5)$$

теңдеуін қарастырайық.Мұндағы

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i} \text{ - Даламбер операторы.}$$

Теорема1. Егер

$$\Box f(x,t) = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta f(x,t) = \lambda f(x,t) \qquad (\lambda \neq 0)$$

теңдігі орындалса,яғни $f(x,t)$ функциясы толқындық оператордың $\lambda \neq 0$ меншікті мәніне сәйкес келетін меншікті векторы болса, онда

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda} f(x,t) \qquad (6)$$

функциясы (5) теңдеудің дербес шешімі болады.

Дәлелдеуі. (6) функцияның керек туындыларын тауып, (5) теңдеуге апарып қояйық:

$$u_{x_i x_i} = \frac{1}{\lambda} f_{x_i x_i}, \; u_{tt} = \frac{1}{\lambda} f_{tt}$$

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = \frac{1}{\lambda} f_{tt} - \frac{1}{\lambda} a^2 \sum_{i=1}^{m} f_{x_i x_i} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \Delta f \right] = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda f(x,t) = f(x,t)$$

Бұдан $u(x,t) = \frac{1}{\lambda} f(x,t)$ функциясы (5) теңдеудің шешімі болатындығы шығады.

Ескерту. Егер $f(x,t)$ функциясы біртекті толқын теңдеуінің шешімі болса, онда ол жағдайды бөлек қарастыру керек.

Теорема2. Егер $\Delta \psi_0(x) = \lambda \psi_0(x)$,яғни $\psi_0(x)$ функциясы Даламбер операторының λ меншікті мәніне сәйкес келетін меншікті векторы, ал $f(t)$ функциясы $f''(t) - a^2 \lambda f(t) = \varphi_0(t)$ жай дифференциалдық теңдеудің шешімі болса, онда $u(x,t) = f(t)\psi_0(x)$ (5) теңдеудің дербес шешімі болады.

Дәлелдеу.

$$u_{tt} = f''(t)\psi_0(x), \qquad u_{x_i x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi_0(x) f(t)$$

болғандықтан

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f''(t)\psi_0(x) - a^2 f(t) \Delta \psi_0(x) + \lambda a^2 f(t)\psi_0(x) - \lambda a^2 f(t)\psi_0(x) =$$
$$= f''(t)\psi_0(x) - a^2 f(t)[\Delta \psi_0(x) - \lambda \psi_0(x)] - \lambda a^2 f(t)\psi_0(x) = f''(t)\psi_0(x) - 0 \cdot a^2 f(t) -$$
$$- \lambda a^2 f(t)\psi_0(x) = \left(f''(t) - \lambda a^2 f(t)\right)\psi_0(x) \equiv \varphi_0(t)\psi_0(x).$$

Бұл $u(x,t) = f(t)\psi_0(x)$ функциясының (5) теңдеудің дербес шешімі болатындығын көрсетеді.

Мысал1. Есепті шешіңіз:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + 90\cos(2x + 9t), \; x > 0, \; t > 0, \\ u|_{t=0} = 8\cos 3x - 5\cos 2x, \; u_t|_{t=0} = 0, \; x \geq 0, \\ u_x|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t, \; t \geq 0. \end{cases}$$

Шешуі:

$$\Box \cos(2x + 9t) = -4.5\cos(2x + 9t)$$

болғандықтан

$$u_{дербес} = C\cos(2x + 9t) \Rightarrow -C45\cos(2x + 9t) = 90\cos(2x + 9t) \Leftrightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow u_{дербес} = -2\cos(2x + 9t) \Rightarrow u(x,t) = f(x + 3t) + g(x - 3t) - 2\cos(2x + 9t).$$

Бірінші әдіс (біртекті теңдеуге көшпей және Даламбер формуласын қолданбай).

I. Коши есебін шешеміз.

$$\begin{cases} f(x)+g(x)-2\cos 2x = 8\cos 3x - 5\cos 2x,\ x \ge 0, \\ f'(x)-g'(x)+6\sin 2x = 0, \qquad x \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)+3\cos 2x = 8\cos 3x, \\ f(x)-g(x)-3\cos 2x = C. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 4\cos 3x + \dfrac{C}{2}, \qquad x \ge 0, \\ g(x) = 4\cos 3x - 3\cos 2x - \dfrac{C}{2},\ x \ge 0. \end{cases}$$

Көріп тұрғанымыздай, функциялар тек теріс емес таңбалы аргументтің мәндері үшін табылды.Сондықтан $f(x+3t)$, $g(x-3t)$ функцияларда тек теріс емес таңбалы аргумент мәндері үшін табылады, яғни

$$f(x+3t) = 4\cos 3(x+3t) + \frac{C}{2},\ x+3t \ge 0,$$

$$g(x-3t) = 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t) - \frac{C}{2},\ x-3t \ge 0.$$

4) Сонымен, $f(x+3t)$, $g(x-3t)$ функциялары AOB бұрышының ішінде, яғни $x-3t \ge 0, x+3t \ge 0$ үшін табылды.Бірақ біз шешімді $t \ge 0, x \ge 0$ үшін іздестіреміз. $f(x+3t)$ бізге керек барлық облыста анықталды,ал $g(x-3t)$ D_1 ішкі бұрышында анықталды. Шешім тек қана D_1 ішкі бұрышында анықталды және тек Коши бастапқы шарттармен анықталды:

$$u(x,t)_{D_1} = 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t) + 4\cos 3(x+3t) - 2\cos(2x+9t),$$
$$x-3t \ge 0, x+3t \ge 0, x \ge 0, t \ge 0.$$

II. Енді шекаралық шартты қолданамыз.

$$u_x\big|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t, t \ge 0.$$

Осы шартты формулаға қоямыз: $u(x,t) = f(x+3t) + g(x-3t) - 2\cos(2x+9t)$:

$$u_x\big|_{x=0} = 18t - 2\sin 9t \Leftrightarrow 18t - 2\sin 9t = f'(3t) + g'(-3t) + 4\sin 9t.$$

Бұдан көріп тұрғанымыздай $f-$ тің аргументі теріс емес, ал f және g функциялары аргументтің теріс емес мәндері үшін Коши шарттарынан анықталған. $g-$ функциясы аргументі оң емес болғандықтан, функция белгісіз оны g_1 арқылы белгілейміз. Өзімізге белгілі f функциясын қояйық:

$$18t - 2\sin 9t = -12\sin 9t + g_1'(-3t) + 4\sin 9t \Leftrightarrow g_1'(-3t) = 18t + 6\sin 9t \Leftrightarrow$$
$$g_1'(\xi) = -6\xi - 6\sin 3\xi, -3t = \xi, \zeta \le 0 \Leftrightarrow g_1(\xi) = -3\xi + 2\cos 3\xi + B, \xi \le 0.$$

Шешім мынадай түрде болады:

$$u(x,t)_{D_2} = 4\cos 3(x+3t) - 3(x-3t)^2 + 2\cos 3(x-3t) - 2\cos(2x+9t) + B + \frac{C}{2},$$
$$x-3t \le 0,\ x+3t \ge 0,\ x \ge 0, t \ge 0.$$

III. Енді шешімді $x = 3t$ характеристика бойынша ‘‘желімдейміз” (сонымен $f(x+3t)$ тек қана осы функция сондықтан тек $g(x-3t)$және $g_1(x-3t)$,функцияларын $x = 3t$ болғанда ‘‘желімдейміз” ,яғни $g(0)$ және $g_1(0)$):

$$u(x,t)_{D_1}\Big|_{x=3t} = u(x,t)_{D_2}\Big|_{x=3t} \Leftrightarrow B + \frac{C}{2} + 2 = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{C}{2} - 1.$$

Жауабы:

$$u(x,t) = -2\cos(2x+9t) + 4\cos 3(x+3t) +$$
$$+\begin{cases} 4\cos 3(x-3t) - 3\cos 2(x-3t), x-3t \ge 0, x \ge 0, t \ge 0; \\ 2\cos 3(x-3t) - 3(x-3t)^2 - 1, x-3t < 0, x \ge 0, t \ge 0. \end{cases}$$

Біртекті емес толқын және жылуөткізгіштік теңдеулеріне қойылатын Коши есебінің дербес шешімін табудың әдісі.Толқын және жылуөткізгіштік теңдеулеріне қойылатын Коши есептерін қарастырайық.

Толқын теңдеуі үшін Коши есебі:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t),\ D = \{(x,t) : t > 0, x \in R^m\} \qquad (7)$$

теңдеуінің

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x),\ \ u_t(x,t)\big|_{t=0} = u_1(x), x \in R^m \qquad (8)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $C^{\bar{2}}(D) \cap C^{0,1}\left(\bar{D}\right)$ класында жататын шешімін табу керек.

Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t),\ D = \{(x,t) : t > 0, x \in R^m\} \qquad (9)$$

теңдеуінің

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x),\ \ x \in R^m \qquad (10)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $C^{\bar{2},1}(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$ класында жататын шешімін табу керек.

Бірінші екеуіне ортақ дербес шешімді табу әдісін қарастырамыз.

Теорема3. $f(x,t) = g(x)$ болсын. Егер $\Delta^n g = 0,\ \Delta^n u_0 = 0,\ \Delta^n u_1 = 0$ болатындай $n \in N$ нөмірі табылатын болса, онда

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi_{m-1}(x) \qquad (11)$$

функция (7)-(8) есебінің дербес шешімін анықтайды. Мұндағы m-нөмірі нақтыланбаған ол шешімді табу кезінде нақтыланады, ал $\varphi_i(x)$ функциялары $u_0(x),\ u_1(x),\ g(x)$ функцияларымен туындылары арқылы анықталады.

Дәлелдеуі: (11) формуламен анықталатын функцияның керек туындыларын табайық:

$$u_{tt} = \varphi_1(x) + \frac{t}{1!}\varphi_2(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_4(x) + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\varphi_{m-1}(x)$$

$$\Delta u = \Delta u_0(x) + t\Delta u_1(x) + \frac{t^2}{2!}\Delta\varphi_1(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\Delta\varphi_{m-1}(x)$$

$u(x,t)$ функциясы (7) теңдеуді қанағаттандырады деп ұйғарайық, яғни

$$\varphi_1(x) + \frac{t}{1!}\varphi_2(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi_3(x) + \frac{t^3}{3!}\varphi_4(x) + \ldots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\varphi_{m-1}(x) =$$

$$\equiv a^2\left(\Delta u_0(x) + t\Delta u_1(x) + \frac{t^2}{2!}\Delta\varphi_1(x) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\Delta\varphi_{m-1}(x) + g(x)\right)$$

……………

Бұдан қандай да бір k нөмірден бастап барлық φ_i функциялары нөлге айналатындығы көрініп тұр. Демек (11) формуламен анықталатын функцияға қатысатын $\varphi_i(x)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ функцияларын $u(x,t)$ функциясы (7)-(8) есебінің шешімі болатындай етіп таңдап алуға болады.Сондықтан $u(x,t)$ функциясы (7)-(8) есебінің дербес шешімін анықтайды.

Салдар 1. $f(x,t)=g(x)$ болсын. Егер $\Delta^n g=0,\quad \Delta^n u_0(x)=0$ болатындай $n\in N$ нөмірі табылатын болса, онда

$$u(x,t)=u_0(x)+t\varphi_1(x)+\frac{t^2}{2!}\varphi_2(x)+\ldots+\frac{t^m}{m!}\varphi_m(x)$$

функция (9)-(10) есебінің дербес шешімін анықтайды.

Ескерту2. Егер $u_0(x),\ u_1(x)$ функциялары жоғарыдағы шарттарды қанағаттандырмайтын болса,онда дербес шешімді

$$u(x,t)=\frac{t^2}{2!}\varphi_2(x)+\ldots+\frac{t^m}{m!}\varphi_{m-1}(x)$$

түрінде іздестірген өте ыңғайлы.

Ескерту3. Біртекті толқын және жылуөткізгіштік теңдеулердің $m>1$болғанда жалпы шешімі болмайтын болғандықтан, дербес шешімді тапқаннан кейін теңдеу біртекті болатындай

$$\vartheta(x,t)=u(x,t)-u_{дербес}(x,t)$$

жылжыту жасау қажет.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.-М.:Наука,1988.
2. Уроев В.М. Уравнения математической физики.-М.:ИФ Яуза,1998.
3. Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.: Физматлит,2004.
4. Кузнецов Е.А,. Шапиро Д.А. Методы математической физики. - М.: Новосибирск 2011.

УДК: 519.246

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ЛЕХМЕРА В КРИПТОГРАФИИ

Әскербеков Мейіржан Әскербекұлы

meirzhan-250@mail.ru

Магистрант Института теоретической математики
и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – М.Жайнибекова

Статья посвящена получению случайных чисел с использованием генератора случайных чисел Лехмера. Цель работы – построение случайной линейной конгруэнтной последовательности с максимальным периодом (определение см. ниже) и их практическое применение в задачах криптографии.

Случайные числа имеют большое количество приложений в различных областях человеческой деятельности: в криптографии, в вычислениях, в моделировании, в промышленных испытаниях, в азартных играх и т.д.