ӘОК 532.5; 519.95

ЖҰЛДЫЗДАР ДИНАМИКАСЫНДАҒЫ ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІ

Байбатыр Қасымхан
Kasim.kz_1994@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ физика – техникалық факультетінің магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Д.И. Кенжалиев

Үш дене есебі – аспан механикасы мен жұлдыздар динамикасындағы әлі толық шешімін таппаған ескі есептің бірі. Яғни бұл есепте кез-келген үш аспан денелерінің Ньютон заңдары бойынша бір – біріне әсер ете отырып қозғалысы қарастырылады. Бұл есептің жалпы жағдайда аналитикалық шешімі болмайды (яғни бұл жүйені сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді интегралдай алмаймыз) [1].

1767 жылы ең алғаш бұл есепті дербес жағдайда шешкен швейцариялық математик Леонард Эйлер болатын. Эйлер бойынша үш дене (материалдық нүктелер) бір түзудің бойында бірінен кейін бірі тізбекті орналасқан. Мұндай қозғалысты коллинеарлы деп атаймыз. Бұл мақалада үш дененің әрқайсысына бастапқы шарттарды бере отырып жалпы жағдайдағы олардың қозғалыс траекторияларын анықтаймыз. Мұндай жалпы жағдайда ең алғаш шешкен Исак Ньютон болатын. Бұл мақалада біз 1-ші денеге 2-ші және 3-ші денелердің немесе 2-ші денеге 3-ші және 1-ші денелердің және 3-ші денеге 2-ші және 1-ші денелердің әсер етуін бүкіл әлемдің тартылыс күші арқылы көрсете отырып, 9 түрлі екінші ретті дифференциалдық қозғалыс теңдеулерін аламыз [2].

Ньютон заңдарын қолдана отырып үш дене есебінің жалпы шешімін алу.

Есеп бірінші m_1, m_2, m_3 денелердің массасын анықтаудан бастау алады. Және де олардың арасындағы өзара әсерлесу Ньютонның гравитациялық заңымен анықталады. Үш дене үшін қозғалыс теңдеуін мына түрде жазуға болады [3]:

$$m_i \ddot{x}_i = -G\sum_{i=j} m_1 m_2 \frac{(x_i - x_j)}{\left[x_i - x_j\right]^2} \tag{1}$$

Қозғалыс теңдеуінің компоненттері. Ары қарай денелердің бір біріне әсер етулерін былай жазайық. 1-ші денеге 2-ші және 3-ші денелердің немесе 2-ші денеге 3-ші және 1-ші денелердің және 3-ші денеге 2-ші және 1-ші денелердің әсер етуін күштер арқылы былайша сипаттайық.

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_{12} + F_{13} \tag{2}$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = -F_{21} + F_{23} \tag{3}$$

$$m_3 \ddot{r}_3 = -F_{31} + F_{32} \tag{4}$$

мұндағы

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \ \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31} \tag{5}$$

Әр дене үшін Декарт координаттар жүйесін жазайық. Бұл координаттар уақытқа тәуелді:

$$
\begin{aligned}
x_{12} &= x_2(t) - x_1(t) \\
y_{12} &= y_2(t) - y_1(t) \\
z_{12} &= z_2(t) - z_1(t) \\
x_{21} &= -x_2(t) + x_1(t) \\
y_{21} &= -y_2(t) + y_1(t) \\
z_{21} &= -z_2(t) + z_1(t) \\
x_{13} &= x_3(t) - x_1(t) \\
y_{13} &= y_3(t) - y_1(t) \\
z_{13} &= z_3(t) - z_1(t) \\
x_{31} &= -x_3(t) + x_1(t) \\
y_{31} &= -y_3(t) + y_1(t) \\
z_{31} &= -z_3(t) + z_1(t) \\
x_{23} &= x_3(t) - x_2(t) \\
y_{23} &= y_3(t) - y_2(t) \\
z_{23} &= z_3(t) - z_2(t) \\
x_{32} &= -x_3(t) + x_2(t) \\
y_{32} &= -y_3(t) + y_2(t) \\
z_{32} &= -z_3(t) + z_2(t)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(6) шы формулалардан үш дене арасындағы арақашықтықты білдіретін векторларды қорытып алуға болады:

$$\vec{r}_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{7}$$

$$\vec{r}_{13} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} \tag{8}$$

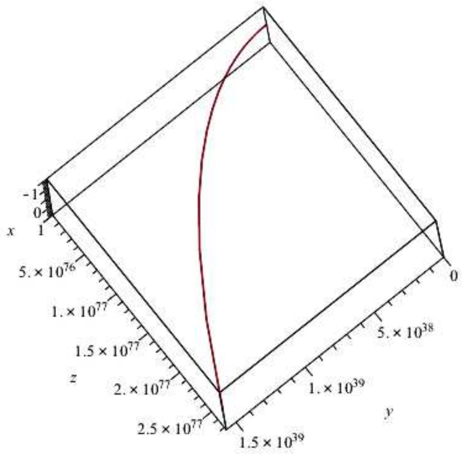
$$\vec{r}_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} \tag{9}$$

(7) мен (8) теңдеулерді (1)-ші формулаға қою арқылы 1-ші дене үшін мынадай қозғалыс теңдеуін аламыз:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_2 \times x_{12}}{(\vec{r}_{12})^3} - \frac{G \times m_3 \times x_{13}}{(\vec{r}_{13})^3} \tag{12}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_2 \times y_{12}}{(\vec{r}_{12})^3} - \frac{G \times m_3 \times y_{13}}{(\vec{r}_{13})^3} \tag{13}$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_2 \times z_{12}}{(\vec{r}_{12})^3} - \frac{G \times m_3 \times z_{13}}{(\vec{r}_{13})^3} \tag{14}$$



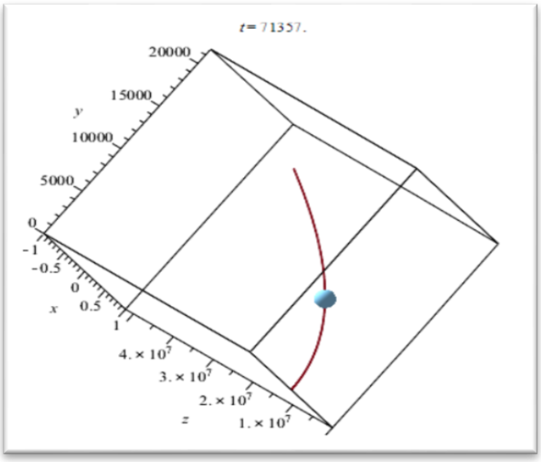
1-сурет – Maple 18 – бағдарламасын пайдалану арқылы алынған 1 ші дененің қозғалыс графигі

(7) мен (9) теңдеулерді (1)-ші формулаға қою арқылы 2-ші дене үшін мынадай қозғалыс теңдеуін аламыз.

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_1 \times x_{21}}{(\vec{r}_{12})^3} - \frac{G \times m_3 \times x_{23}}{(\vec{r}_{23})^3} \tag{15}$$

$$\frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_1 \times x_{21}}{(\vec{r}_{12})^3} - \frac{G \times m_3 \times x_{23}}{(\vec{r}_{23})^3} \tag{16}$$

$$\frac{d^2 z_2(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_1 \times x_{21}}{(\vec{r}_{12})^3} - \frac{G \times m_3 \times x_{23}}{(\vec{r}_{23})^3} \tag{17}$$



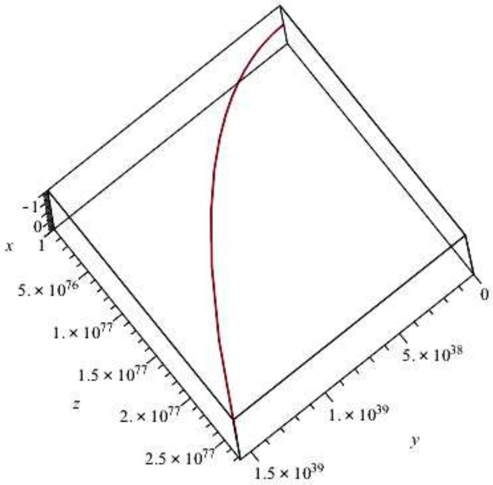
2 -сурет – Maple 18 – бағдарламасын пайдалану арқылы алынған 2- ші дененің қозғалыс графигі

(8) және (9) теңдеулерді (1)-ші формулаға қою арқылы 3-ші дене үшін мынадай қозғалыс теңдеуін аламыз.

$$\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_1 \times x_{31}}{(\vec{r}_{13})^3} - \frac{G \times m_2 \times x_{32}}{(\vec{r}_{23})^3} \tag{18}$$

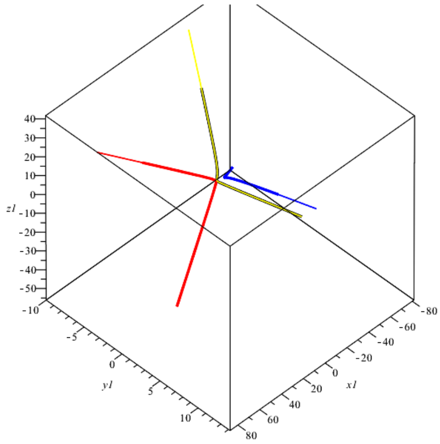
$$\frac{d^2y_3(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_1 \times y_{31}}{(\vec{r}_{13})^3} - \frac{G \times m_2 \times y_{32}}{(\vec{r}_{23})^3} \tag{19}$$

$$\frac{d^2y_3(t)}{dt^2} = -\frac{G \times m_1 \times y_{31}}{(\vec{r}_{13})^3} - \frac{G \times m_2 \times y_{32}}{(\vec{r}_{23})^3} \tag{20}$$



3-сурет – Maple 18 – бағдарламасын пайдалану арқылы алынған 3-ші дененің қозғалыс графигі

Бұл графиктерді алу үшін әр дененің уақытқа тәуелді координаталарына ,бастапқы жылдамдықтарына сан мәндерін беру арқылы қозғалыс графиктерін алдық. Бұл графиктер Эллипсті орбиталардың бір бөлігін сипаттайды. Енді осы үш дене компоненттерін біріктіре отырып, Maple 18 бағдарламасының командалары арқылы үш дене қозғалысын бір графикте суреттедік.



4-сурет – Үш дененің бір графиктегі қозғалысы(көк түс-1-ші дене, сары түс-2-ші дене, қызыл түс -3-ші дене

Қорытынды

Бұл мақалада біз үш дене есебінің жалпылама шешімін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер арқылы қозғалыс теңдеулерін алып, берілген айнымалыларды шыққан теңдеулерге қойдық. Сонымен қатар, Maple18 бағдарламасын қолдана отырып, әр дене үшін графиктерді алдық. Кейін Maple18 бағдарламасы арқылы әр дене үшін алынған графиктерді біріктіріп, үш дененің қозғалысын бір графикте көрсеттім. Бұл мақалада үш жұлдызды қарастырдық. Есептеулер нәтижесінде қарастырылған екі жұлдыздардың массалары үшінші жұлдыздың массасынан жеңіл болды. Соған байланысты екі дененің бастапқы жылдамдықтары үшінші дененің жылдамдығына қарағанда жылдамдырақ болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике // Ижевск: РХД. 2001. С. 156.
2. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике // М. ИЛ. 1959. С. 300.
3. Маршал К. Задача трёх тел // Ижевск: РХД. 2004. С. 640.