ӘОК 532.5; 519.95

ЖАЛПЫЛАНҒАН КӨПӨЛШЕМДІ ДИСПЕРСИЯЛЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕР

Қайратқызы Әдемі[1], Нұрат Индира Қайратқызы[2]
ademikairatkyzy@mail.ru, indira.nurat@mail.ru
[1]Физика-техникалық факультетінің магистранты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2]Физика-техникалық факультетінің оқытушысы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші– Г.Н. Шайхова

1. Кіріспе. Солитон - тұрақты құрылымы бар пішіні мен жылдамдығын сақтайтын сызықты емес жекеленген толқын. Солитондар арасындағы өзара әсерлесуді зерттеу ғылымда үлкен рөл атқарады [1-2]. Көптеген әдістер арасынан Лакс жұптарына негізделген Дарбу түрлендіруі сызықтық емес эволюциялық теңдеудің солитондық шешімі үшін ең тиімді жол екендігі дәлелденген [3-5]. Дисперсиялық жүйе әртүрлі мәселелердің анализінен туындайтындықтан болғандықтан, оларды шешудің мәні зор. Олар физика мен математика сияқты салаларда кеңінен қолданылады . Бұл мақалада дисперсиялық емес теңдеулерді қарастырамыз:

$$q_{xt}+2\beta\left(q+\frac{\beta}{\alpha}r\right)r_x=0,\qquad (1)$$
$$r_{xt}-2\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}q+r\right)q_x=0$$

мұндағы α мен β - нөлдік емес тұрақтылар, q және r - x пен t-дан тәуелді функциялар. Бұл мақалада дисперсиялық емес байланысқан жүйенің $q=x$, $r=-x$ жағдайындағы жалпыланған нұсқасын қарастырамыз.

Интегралды дисперсиялық емес теңдеу (1) үшін Дарбу түрлендіруін спектралдық мәселе көмегімен біз құрып, жаңа шешім аламыз.

2.Дарбу түрлендіруі. Бұл бөлімде (1) теңдеулер үшін жаңа Дарбу түрлендіруін аламыз. Спектралды мәселені қарастырайық

$$\phi_x=U\phi,\quad U=\begin{pmatrix}\alpha q_x\lambda & \beta r_x\lambda\\ \beta r_x\lambda & -\alpha q_x\lambda\end{pmatrix}\qquad (2)$$

және қосымша мәселе

$$\phi_t=V\phi,\quad V=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\lambda} & -\frac{1}{2\lambda}-(\alpha q+\beta r)\\ -\frac{1}{2\lambda}+(\alpha q+\beta r) & -\frac{1}{2\lambda}\end{pmatrix}\qquad (3)$$

(2) және (3) теңдеулері үшін сәйкестік шарты:

$$U_t-V_x+[U,V]=0\qquad (4)$$

(4) теңдікті есептеп (1) теңдеулерді аламыз. Дарбу түрлендіруі негізінен (2) және (3) теңдеулердің спектральді мәселенің калибрлі түрлендіруі болып табылады:

$$\bar{\phi}=T\phi\qquad (5)$$

$\bar{\phi}$ де келесі спектральді мәселені қанағаттандыру керек

$$\bar{\phi}_x=\bar{U}\bar{\phi},\quad \bar{U}=\begin{pmatrix}\alpha\bar{q}_x\lambda & \beta\bar{r}_x\lambda\\ \beta\bar{r}_x\lambda & -\alpha\bar{q}_x\lambda\end{pmatrix}\qquad (6)$$

$$\bar{\phi}_t=\bar{V}\bar{\phi},\quad V=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\lambda} & -\frac{1}{2\lambda}-(\alpha\bar{q}+\beta\bar{r})\\ -\frac{1}{2\lambda}+(\alpha\bar{q}+\beta\bar{r}) & -\frac{1}{2\lambda}\end{pmatrix}\qquad (7)$$

Бұл U және V матрицасындағы r мен q айнымалыларын сәйкесінше $\bar{r}$ және $\bar{q}$ деп алмастыру арқылы T матрицасын анықтаймыз. (2) және (3) теңдіктер үшін $\lambda = \lambda_k$ және $h^{(k)} = \left(h_1^{(k)}, h_2^{(k)}\right)^T$ болсын. Онда $h^{(k)-} = \left(h_2^{(k)}, -h_1^{(k)}\right)$ өрнегі $\lambda = -\lambda_k$ өрнегінің шешімі болып табылады деп алсақ,

$$S^{(k)} = H\Lambda H^{-1} = \frac{1}{\lambda_k}\begin{pmatrix} \frac{(h_1^k)^2 - (h_2^k)^2}{(h_1^k)^2 + (h_2^k)^2} & \frac{2h_1^k h_2^k}{(h_1^k)^2 + (h_2^k)^2} \\ \frac{2h_1^k h_2^k}{(h_1^k)^2 + (h_2^k)^2} & \frac{(h_2^k)^2 - (h_1^k)^2}{(h_1^k)^2 + (h_2^k)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & B^{(1)} \\ B^{(1)} & -A^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

мұнда

$$H = \begin{pmatrix} h_1^{(k)} & h_2^{(k)} \\ h_2^{(k)} & -h_1^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{және} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_k} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_k} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

T функциясы:

$$T = \frac{1}{\lambda} I - S^{(k)} \ , \tag{10}$$

демек

$$\bar{U} = \left(T_x + TU\right)T^{-1}, \tag{11 а}$$

$$\bar{V} = \left(T_t + TV\right)T^{-1} \ . \tag{11 б}$$

(6)-(7) және (11а)- (11 б) өрнектерін теңдеудің жалпы шешімін табу үшін пайдаланамыз. Нәтижесінде:

$$\begin{gathered} \bar{q} = 2q + \frac{2}{\alpha} A \\ \bar{r} = 2r + \frac{2}{\beta} B \end{gathered} \tag{12}$$

3. Нақты шешімі

$q = x$, $r = -x$ кезіндегі $h_1^{(1)}, h_2^{(1)}$ мәндерін анықтайық. U матрицасы бойынша:

$$\psi_{1x} = \alpha q_x \lambda \psi_1 + \beta r_x \lambda \psi_2, \tag{13 а}$$

$$\psi_{2x} = \beta r_x \lambda \psi_1 - \alpha q_x \lambda \psi_2, \tag{13 б}$$

V матрицасы бойынша:

$$\psi_{1t} = \frac{1}{2\lambda}\psi_1 + \left(-\frac{1}{2\lambda} - \alpha q - \beta r\right)\psi_2, \tag{14 а}$$

$$\psi_{2t} = \left(-\frac{1}{2\lambda} + \alpha q + \beta r \right) \psi_1 - \frac{1}{2\lambda} \psi_2 . \qquad (14\ б)$$

$q = x$, $r = -x$ x бойынша туындысы сәйкесінше $q_x = 1$ $r_x = -1$ болады, демек

$$\psi_{1x} = \alpha\lambda\psi_1 - \beta\lambda\psi_2 , \qquad (15\ а)$$

$$\psi_{2x} = -\beta\lambda\psi_1 - \alpha\lambda\psi_2 , \qquad (15\ б)$$

$$\psi_{1t} = \frac{1}{2\lambda}\psi_1 + \left(-\frac{1}{2\lambda} - \alpha x + \beta x \right) \psi_2 , \qquad (16\ а)$$

$$\psi_{2t} = \left(-\frac{1}{2\lambda} + \alpha x - \beta x \right) \psi_1 - \frac{1}{2\lambda} \psi_2 . \qquad (16\ б)$$

(15 а)-(15 б) және (16 а)-(16 б) теңдеулер жүйесін шешіп, h_1 және h_2 мәндерін аламыз:

$$h_1 = \exp(k_1 x + s_1 t) , \qquad (17\ а)$$

$$h_2 = \exp(k_2 x + s_2 t) \qquad (17\ б)$$

Мұндағы

$$\kappa_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \right)}} , \qquad (18\ а)$$

$$\mathrm{s}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 + 2\lambda}{4\lambda^2} + x^2 \left(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta \right)} \qquad (18\ б)\backslash$$

(17 а)-(17 б) теңдеулеріне қойып, келесі өрнекті аламыз:

$$A = \frac{(h_1)^2 - (h_2)^2}{(h_1)^2 + (h_2)^2} \qquad B = \frac{2h_1 h_2}{(h_1)^2 + (h_2)^2} \qquad (19)$$

A және B мәндерін табамыз. (12) және (19) теңдеулерді ескеріп $q = x$, $r = -x$ жағдайы үшін нақты шешімдерді мына түрде аламыз:

$$\bar{q} = 2x - \frac{2}{\alpha} A, \qquad \bar{r} = -2x - \frac{2}{\beta} B \qquad (20)$$

мұнда

$$A = \frac{\left(e^{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x + \sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2} + x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}t}\right)^2 - \left(e^{-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x - \sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2} + x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}t}\right)^2}{\lambda\left(\left(e^{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x + \sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2} + x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}t}\right)^2 + \left(e^{-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x - \sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2} + x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}t}\right)^2\right)}$$

$$B=\frac{2\left((e^{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x+\sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2}+x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}})(e^{-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x-\sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2}+x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}})\right)}{\lambda\left((e^{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x+\sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2}+x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}})^2+(e^{-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}x-\sqrt{\frac{1+2\lambda}{4\lambda^2}+x^2\left(\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta\right)}})^2\right)}$$

Қорытынды

Бұл мақалада Дарбу әдісін пайдалану арқылы жаңа дисперсиялық емес теңдеулер жүйесінің нақты шешімдері шықты. Дарбу әдісін негізінде бірінші ретті түрлендіру алынды және $q=-x$, $r=-x$ жағдайы қарастырылды.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир, 1987 г.. С. 479.
2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980 г., С. 85-90.
3. Құрбанғалиева Ә. Қ., Шайхова Г.Н., Сыздыкова А.М. Екі компонентті комплексті модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің нақты солитондық шешімдері // Вестник КазНПУ им Абая № 2 (58), 2017 г., С. 178-185.
4. Yang J.,Li Ch.,Li T.,Cheng Z., Darboux transformations and solitons of the two-component Hirota-Maxwell-Bloch system, China, 2013. P. 106.
5. Chen Aihua, Li Xuemei, Soliton solutions of the coupled dispersionless equation //Physics Letters A. 2007. -P. 281–286.