ӘОК 532.5

ЕКІ ӨЛШЕМДІ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ХИРОТА ТЕҢДЕУІНЕ ДАРБУ ТҮРЛЕНДІРУІ

Оразбаева Гүлнұр Мұратқызы
sagynbekgulnur@gmail.com
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Физика-техникалық факультетінің студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Г.Т. Бекова

Сызықты емес Хирота теңдеуі интегралданатын теңдеудің бірі болып табылады. Хирота жүйесі көптеген сызықты емес құбылыстарды сипаттау үшін қолданылады және оптикалық талшықтар жүйесінің зерттеу аймағында, физика ғылымы, электрлік байланыс және басқа да салаларда кең қолданысқа ие.

Бір және екі өлшемді Хирота теңдеулер жүйесі шетелдік және отандық ғалымдармен толық зерттелген деп айтуға болады, бірақ екі өлшемді Хирота теңдеулер жүйесі үшін N-ретті Дарбу түрлендіруі және 2, 3 солитондық, қиратушы толқынды шешімдері құрылмаған. Сондықтан, біз осы мақалада екі өлшемді сызықты емес Хирота теңдеуіне екінші ретті Дарбу түрлендіруін құрамыз.

Бір компонентті екі өлшемді сызықты емес Хирота теңдеуін мына түрде қарастырайық:

$$\begin{aligned} &iq_t + \alpha q_{xy} + i\beta q_{xxy} - vq + i(\omega q)_x = 0, \\ &v_x + 2\alpha\delta(|q|^2)_y - 2i\beta(q^*_{xy}q - q^*q_{xy}) = 0, \\ &\omega_x - 2\beta\delta(|q|^2)_y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

мұндағы, q_x, q_t - комплексті функциялар, x, t -ға тәуелді. $q(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $\omega(x,y,t)$ - белгісіз потенциалдар. α, β, δ -нақты тұрақтылар.

Осы екі өлшемді сызықты емес Хирота жүйесі үшін Лакс жұбы келесідей түрде беріледі:

$$\begin{aligned} &\psi_x = A\psi, \\ &\psi_t = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\psi_y + B\psi, \end{aligned}$$

мұндағы λ – спектральды параметр. Ψ - тәуелсіз функция, ол $\Psi(x,y,t;\lambda) = (\Psi_1, \Psi_{2,} \Psi_3)^T$. A және B матрицалары

$$\begin{aligned} &A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \\ &B = \lambda B_1 + B_0, \end{aligned}$$

мұндағы A_0, B_0 және δ_3 өлшемдері $[2\times 2]$матрицалар:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = -\frac{i}{2}\nu\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & i\alpha q_y - \beta q_{xy} - \omega q \\ i\alpha r_y + \beta r_{xy} + \omega r & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = i\omega\sigma_3 + 2i\beta\sigma_3 A_{0y}, \quad r = \delta q^*, \ k = \delta p^*, \ \delta = \pm 1.$$

Сәйкестік шартын

$$A_t - B_x + [A, B] - (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)A_y = 0.$$

пайдаланып, біз (1) теңдеулерлер жүйесін, яғни екі өлшемді сызықты емес Хирота жүйесін ала аламыз.

Енді екі өлшемді сызықты емес Хирота теңдеуі үшін екінші ретті Дарбу түрлендіруін қарастырайық. Ол үшін жаңа $\Psi^{[2]}$ меншікті функциясын енгіземіз. Ол Ψ меншікті функциямен мынадай байланыста болсын:

$$\Psi^{[2]} = T\Psi = (\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1)\Psi, \tag{2}$$

мұндағы, λ - кез-келген спектральдық параметр,

$$S_2 = \begin{pmatrix} (S_2)_{11} & (S_2)_{12} \\ (S_2)_{21} & (S_2)_{22} \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} (S_1)_{11} & (S_1)_{12} \\ (S_1)_{21} & (S_1)_{22} \end{pmatrix},$$

$\Psi^{[2]}$ жаңа меншікті функциясы үшін Лакс жұбын мына түрде жазамыз:

$$\begin{aligned} &\psi_x^{[2]} = A^{[2]}\psi^{[2]}, \\ &\psi_t^{[2]} = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\psi_y^{[2]} + B^{[2]}\psi^{[2]}, \end{aligned} \tag{3}$$

мұндағы, $A^{[2]}, B^{[2]}$ жаңа шамалар $q^{[2]}, \nu^{[2]}, \omega^{[2]}$ және λ-ға тәуелді.

Енді (2) теңдеу жүйесінің екінші теңдеуін x бойынша дифференциалдап, (3) теңдеуге қоямыз, сонда:

$$T_x + TA = A^{[2]}T \tag{4}$$

Енді (2) теңдеу жүйесінің екінші теңдеуінен t бойынша дифференциалдап, қайтадан (3) теңдеуге қоямыз:

$$T_t + TB = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)T_y + B^{[2]}T \tag{5}$$

Алынған нәтижелерді қолданып:

$$(\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1)_x + A(\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1) = A^{[2]}(\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1);$$
$$(\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1)_x + (\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1)(-i\lambda\sigma_3 + A_0) = (-i\lambda\sigma_3 + A_0^{[2]})(\lambda^2 I + \lambda S_2 + S_1);$$

$$\begin{aligned}&\lambda S_{2x} + S_{1x} + (i\lambda^3 I\sigma_3 + \lambda^2 IA_0 - i\lambda^2 S_2\sigma_3 + \lambda S_2 A_0 - i\lambda S_1\sigma_3 + S_1 A_0) = \\ &- i\lambda^3\sigma_3 I - i\lambda^2\sigma_3 S_2 - i\lambda\sigma_3 S_1 + \lambda^2 IA_0^{[2]} + \lambda S_2 A_0^{[2]} + S_1 A_0^{[2]};\end{aligned}$$

Алынған өрнектен λ -ның дәрежелері бойынша жинасақ:

$$\begin{aligned}&\lambda^0 : S_{1x} + S_1 A_0 = S_1 A_0^{[2]}, \\ &\lambda^1 : S_{2x} = A_0^{[2]} S_2 - S_2 A_0 + i[S_1, \sigma_3], \\ &\lambda^2 : A_0^{[2]} = A_0 + i[\sigma_3, S_2], \\ &\lambda^3 : -iI\sigma_3 = -i\sigma_3 I.\end{aligned} \tag{6}$$

(6б)-теңдеуден мынаны аламыз

$$\begin{aligned}&q^{[2]} = q + 2i(S_2)_{12}, \\ &r^{[2]} = r + 2i(S_2)_{21}.\end{aligned} \tag{7}$$

Дәл осындай әдіспен (5)-теңдеуден:

$$\begin{aligned}&(\lambda^2 I - \lambda S_2 + S_1)_t + (\lambda^2 I - \lambda S_2 + S_1)(\lambda B_1 + B_0) = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)(\lambda^2 I - \lambda S_2 + S_1)_y + \\ &+ (\lambda B_1^{[2]} + B_0^{[2]})(\lambda^2 I - \lambda S_2 + S_1);\end{aligned}$$

1) $$\begin{aligned}&(\lambda^2 I - \lambda S_2 + S_1)_t + (\lambda^2 I - \lambda S_2 + S_1)(\lambda B_1 + B_0) = \\ &\lambda S_{2t} + S_{1t} + \lambda^3 IB_1 + \lambda^2 S_2 B_1 + \lambda S_1 B_1 + \lambda^2 IB_0 + \lambda S_2 B_0 + S_1 B_0 :\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&(2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)(\lambda S_{2y} + S_{1y}) + \lambda^3 B_1^{[2]} I + \lambda^2 B_1^{[2]} S_2 + \lambda^2 B_1^{[2]} S_1 + \lambda^2 B_0^{[2]} I + \\ &+ \lambda B_0^{[2]} S_2 + B_0^{[2]} S_1 = 2\alpha\lambda^2 S_{2y} + 2\alpha\lambda S_{1y} + 4\beta\lambda^3 S_{2y} + 4\beta\lambda^2 S_{1y} + \lambda^3 B_1^{[2]} I + \\ &+ \lambda^2 B_1^{[2]} S_2 + \lambda S_1 B_1^{[2]} + \lambda^2 B_0^{[2]} I + \lambda B_0^{[2]} S_2 + B_0^{[2]} S_1 :\end{aligned}$$

Алынған өрнектен λ -ның дәрежелері бойынша жинап жазамыз:

$$\begin{aligned}&\lambda^0 : S_{1t} = B_0^{[2]} S_1 - S_1 B_0, \\ &\lambda^1 : S_{2t} = 2\alpha S_{1y} + B_1^{[2]} S_1 + B_0^{[2]} S_2 - S_1 B_1 + S_2 B_0, \\ &\lambda^2 : S_2 B_1 + IB_0 = 2\alpha S_{2y} + 4\beta S_{1y} + B_1^{[2]} S_2 + B_0^{[2]} I, \\ &\lambda^3 : B_1^{[2]} = B_1 - 4\beta S_{2y}.\end{aligned} \tag{8}$$

(8) теңдеулер жүйесінен $B_0^{[2]}$ пен $B_1^{[2]}$ матрицаларын қайта жазайық:

$$B_0^{[2]} = B_0 + S_2 B_1 - 2\alpha S_{2y} - 4\beta S_{1y} - B_1^{[2]} S_2,$$

$$B_1^{[2]} = B_1 - 4\beta S_{2y}$$

Жоғарыдағы екі өрнекке B_1 мен B_0 матрицаларын қоямыз, сонда келесі теңдікті аламыз:

$$\omega^{[2]} = -\omega + 4i\beta\left(S_2\right)_{11} = \omega - 4i\beta\left(S_2\right)_{11},$$
$$\nu^{[2]} = \nu + 4i\alpha S_{11y} + 4\beta(S_{12}q_y^* + S_{12}^* q_y + 2iS_{11}S_{11y} - 2iS_{12}^* S_{12y}).$$

Сонымен, екі өлшемді сызықты емес Хирота жүйесі үшін екінші ретті Дарбу түрлендіруін алдық:

$$q^{[2]} = q + 2i\left(S_2\right)_{12},$$
$$\nu^{[2]} = \nu - 4i\alpha(S_2)_{11y} + 4\beta(q_y^*(S_2)_{21}^* + q_y(S_2)_{21} - 2i(S_1)_{11}s_{11y} + 2i(S_2)_{11y}(S_2)_{11} - 2i(S_2)_{12y}(S_2)_{21}),$$
$$\omega^{[2]} = \omega - 4i\beta\left(S_2\right)_{11}.$$

Осы құрылған Дарбу түрлендіруін пайдалана отырып, екі өлшемді Хирота теңдеулер жүйесі үшін N-ретті Дарбу құруға болады. Сонымен қатар аталған теңдеу үшін 2 және одан да көп солитондық қиратушы толқынды шешімдерді алуға болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Ablowitz M. J., Kruskal M. D., Ladic J. F. Solitary wave collision // SIAM J. Appl. Math. –1979. P. 428-437.
2. Давыдов А. С., Кислюха Н. И. Солитоны в одномерных молекулярных цепях. // ЖЭТФ. – М. 1976. P. 125.
3. Scott Russell J. The wave of translations. London. 1885. P. 524.
4. Бутерин С.А., Игнатьев М.Ю., Кабанов С.Н., Ю.В. Курышова, Д.С. Лукомский, С. И. Поликарпов. Метод обратной задачи в теории нелинейных волн // Учеб. пособие для студ. мех-матем. фак. Саратов. 2013.
5. Scott A. C., Chu F. Y., McLaughlin D. W. The soliton: a new concept in applied science. London: Proc. IEEE, 1973. P. 1443-1483 с.