



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТІРЛІГІ  
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF  
THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

*«Eurasian Mathematical Journal» журналының  
шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған*

**«АНАЛИЗДІҢ, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ  
ЖӘНЕ АЛГЕБРАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» (EMJ-2019)**

атты халықаралық конференция

**ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ**

International Conference

**INTERNATIONAL CONFERENCE  
«ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS,  
DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA» (EMJ-2019)**

*dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal*

**THE ABSTRACT BOOK**

**16-19 қазан 2019  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан**



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТІРЛІГІ  
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF  
THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

«Eurasian Mathematical Journal» журналының  
шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған

«АНАЛИЗДІҢ, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ ЖӘНЕ  
АЛГЕБРАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ » (EMJ-2019)  
атты халықаралық конференция

**ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ**

International Conference  
«ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS  
AND ALGEBRA» (EMJ-2019)  
dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal

**THE ABSTRACT BOOK**

16-19 қазан 2019  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

**ӘОЖ 51**  
**КБЖ 22.1**  
**А 56**

«Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019): «Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла бастағанына 10 жыл толуына арналған халықаралық конференцияның тезистер жинағы.-Нұр-Сұлтан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2019. -183 б.

«Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры»(EMJ-2019): Сборник тезисов международной конференции, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal».-Нур-Слтан: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, 2019. -183 с.

International Conference «Actual problems of analysis, differential equations and algebra» (EMJ-2019) dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. –Nur-Sultan: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2019. -183 p.

ISBN 978-601-7590-58-1

**ӘОЖ 51**  
**КБЖ 22.1**  
© Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, 2019

## Мазмұны/Contents/Содержание

<b>Функциялар теориясы және функционалдық талдау</b>	<b>12</b>
<b>А.М. Абылаева</b> Двухвесовая оценка интегрального оператора с логарифмической особенностью . . . . .	13
<b>А.Н. Адилханов, Ж.М. Онербек</b> О достаточных условиях ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем . . . . .	14
<b>А.Ж. Адиева, А.О. Байарыстанов</b> Об одном переопределенном весовом неравенстве типа Харди в дифференциальной форме . . . . .	15
<b>А.Ж. Адиева, Р. Ойнаров, Я.Т. Султанаев</b> Весовое неравенство и дискретность спектра полярного оператора высокого порядка . . . . .	17
<b>Г. Акишев</b> Оценки наилучших приближений функций класса Никольского - Бесова в пространстве Лоренца . . . . .	18
<b>A.R. Aliev, Sh.Sh. Rajabov</b> Essential self-adjointness of the magnetic helmholtz operator . . . . .	18
<b>Д.Б. Базарханов</b> Оптимальное восстановление псевдодифференциальных операторов на классах гладких периодических функций многих переменных . . . . .	19
<b>К.А. Бекмаганбетов, Е. Толеугазы</b> Об оценке наилучших приближений смешанных дробных производных в анизотропной метрике . . . . .	19
<b>А.Т. Бесжанова, А.М. Темирханова</b> Ограниченность и компактность одного класса матричных операторов с переменными пределами суммирования . . . . .	22
<b>Н.А. Бокаев, А.А. Хайркулова</b> Об оценке нормы в дискретных пространстве Орлича - Морри . . . . .	23
<b>Н.К. Блиев</b> Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения в дробных пространствах . . . . .	25
<b>N.A. Bokayev, E.S. Smailov, A.T. Syzdykova</b> Embedding theorems for Besov type generalized spaces with respect to multiplicative systems . . . . .	26
<b>P.D. Lamberti, V. Vespri</b> Generalised Campanato spaces and Hardy spaces . . . . .	28
<b>P.D. Lamberti, V. Vespri</b> Remarks on Sobolev- Morrey-Campanato spaces defined on $c^{0,\gamma}$ domains . . . . .	28
<b>М.Г. Гадоев, Ф.С. Исхоков</b> О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов . . . . .	29
<b>R. J. Heydarov</b> Constructive method for solving an impedance boundary value problem for Helmholtz equation . . . . .	29
<b>Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова</b> Обобщенное неравенство соболева на стратифицированном множестве . . . . .	31
<b>D. Dautbek, J. Huang and F. Sukochev</b> Extreme points of the set of elements majorised by an integrable function . . . . .	32
<b>А.А. Джумабаева, А.Е. Жетписбаева</b> Неравенство наилучшего приближение со ступенчатым крестом . . . . .	33
<b>Г.Ж. Каршыгина</b> Опоточечном эквивалентности конусов функций с условиями монотонности . . . . .	35
<b>Ж.А. Кеулимжаева</b> Эквивалентные нормы пространства с мультивесовыми производными . . . . .	37
<b>A.N. Kopezhanova</b> Some new inequalities for the Fourier transform . . . . .	39
<b>Л.К. Кусаинова, А.С. Касым</b> Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора на оси в пространствах мультипликаторов. . . . .	40
<b>A.S. Kabdulova</b> Analysis of p-q-sub - Laplacians on Stratified Lie groups . . . . .	42

<b>A.A. Kalybay, R. Oinarov</b> Boundedness of Riemann - Liouville operator from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space . . . . .	44
<b>A. Kassymov</b> Hardy - Littlewood - Sobolev and Stein - Weiss inequalities on homogeneous Lie groups . . . . .	45
<b>Л.К. Кусаинова, А.А. Шкалик, Г. Мурат</b> О мультипликаторах в весовых пространствах потенциалов. приложения. . . . .	46
<b>К.Т. Мунбаев, С.В. Martins Filho</b> Inversion theorems for Fourier transforms . . . . .	47
<b>А.Б. Муқанов</b> Преобразование Фурье и классы Липшица . . . . .	48
<b>Zh. Mukeyeva, E.D. Nursultanov</b> On the interpolation properties of the integral operator in anisotropic spaces . . . . .	50
<b>G.K. Mussabayeva, N.T. Tleukhanova, K. Sadykova</b> Hardy - Littlewood theorem for anisotropic Lorentz spaces . . . . .	51
<b>Y.D. Nursultanov</b> The Marcinkiewicz - Calderon type interpolation theorems . . . . .	52
<b>Е.Д. Нурсултанов, А.Н. Баширова</b> Теорема Харди - Литтлвуда для кратных рядов Фурье - Хаара . . . . .	52
<b>В.К. Omarbayeva</b> Weighted estimate of a class of quasilinear discrete operators . . . . .	53
<b>M. Raikhan, A.E. Uatayeva</b> Stein - Weiss type interpolation theorem of Haagerup noncommutative Hardy spaces associated with subdiagonal algebra . . . . .	55
<b>M.A. Ragusa</b> Actual problems related to some minimizers of functionals . . . . .	56
<b>B. Sabitbek, D. Suragan</b> Geometric hardy inequalities on starshaped sets . . . . .	57
<b>Б.Н. Сейлбеков</b> компактность оператора дробного интегрирования с переменным верхним пределом . . . . .	58
<b>A. Senouci</b> Hardy type inequality with sharp constant for $0 < p < 1$ . . . . .	59
<b>D. Suragan</b> Recent progress in the theory of subelliptic Hardy type inequalities . . . . .	60
<b>F. Sukochev, K. Tulenov, D. Zanin</b> The boundedness of the Hilbert transform in Lorentz spaces and its applications . . . . .	60
<b>D.B. Shilibekova</b> Uncertainty type principles . . . . .	61
<b>M.U. Yakhshiboev</b> On a class of non-convolution operators . . . . .	62
<b>Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики</b>	<b>64</b>
<b>Т.М. Алдибеков, М.М. Алдажарова</b> Об асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений . . . . .	65
<b>М. Алдай, К.Р. Мырзатаева, Д.С. Каратаева</b> Условие осцилляторности и неосцилляторности полулинейного дифференциального уравнения второго порядка	66
<b>С.Е. Айтжанов, Г.Р. Ашурова</b> Поведение решения обратной задачи для псевдопараболического уравнения с $p$ - Лапласианом . . . . .	67
<b>С.Е. Айтжанов, Г.О. Жумагул</b> Разрешимость псевдопараболического уравнения с нелинейными краевыми условиями . . . . .	68
<b>С.Е. Айтжанов, Д.Т. Жанузакова</b> Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения со степенной нелинейностью . . . . .	69
<b>Н. Аканбай, Э.И. Сулейменова, С.К. Тапеева</b> Об эволюции магнитного поля в марковской модели Хаббла . . . . .	70
<b>А. Айжан, М.Б. Жасыбаева, К.Р. Есмаханова</b> представление лакса бездисперсионного $(2+1)$ -мерного уравнения фокаса-ленэллса . . . . .	72
<b>К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов</b> Аналитические функции комплексного аргумента с параметром . . . . .	74
<b>К. Алымкулов, К.Г. Кожобеков</b> Новый подход к построению асимптотики решения уравнения Бесселя для больших значений комплексного аргумента . . . . .	75

<b>А.Т. Асанова, Н.Т. Орумбаева, А.Б. Кельдибекова</b> Об одном приближенном решении периодической раевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка . . . . .	77
<b>M.U. Akhmet, M. Feçkan, M.O. Fen, A. Kashkynbayev</b> Perturbed li-yorke homoclinic chaos . . . . .	79
<b>А.Т. Assanova, Z.S. Tokmurzin</b> Parameter identification in an initial-boundary value problem for hyperbolic equation of the fourth order . . . . .	80
<b>А.С. Бердышев, Н. Адил</b> О непустоте спектра задачи с условиями Бицадзе - Самарского для смешанного парабола-гиперболического уравнения . . . . .	81
<b>Е.А. Bakirova, А.Т. Assanova</b> Control problem for parabolic integro-differential equation with parameter . . . . .	82
<b>B. N. Biyarov, D. A. Svistunov, G. K. Abdrasheva</b> Correct singular perturbations of the Laplace operator . . . . .	84
<b>М.В. Borikhanov</b> Local existence and global non-existence for the integro-differential diffusion equation . . . . .	85
<b>А.Т. Bountis</b> Stable and chaotic dynamics in hamiltonian systems applications to one - dimensional lattices . . . . .	86
<b>Н. Begehr, S. Burgumbayeva, A. Dauletkulova, Н. Lin, B. Shupeyeva</b> Polyanalytic Schwarz problem and the Almaty apple . . . . .	87
<b>М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, А.О. Танин</b> Крещению псевдо - Вольтеррового интегрального уравнения задачи Солонникова - Фазано . . . . .	89
<b>D.S. Dzhumabaev, S.T. Mynbayeva</b> New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation . . . . .	90
<b>М.Т. Jenaliyev, М.И. Ramazanov, M.G. Yergaliyev</b> On the coefficient inverse problems of heat conduction in a degenerating domains . . . . .	92
<b>Ж.Б. Ескабылова, К.Н. Оспанов, Т.Н. Бекжан</b> О существовании и гладкости решения квазилинейного дифференциального уравнения третьего порядка с доминирующим промежуточным членом . . . . .	94
<b>A. Yesbayev</b> Correct solvability of second-order differential equations with unbounded coefficients . . . . .	95
<b>S.S. Zhumatov</b> On a stability of a program manifold of control systems with variable coefficients with stationary nonlinearity . . . . .	97
<b>A.Kh. Zhumagazyev, Zh.A. Sartabanov, G.A. Abdikalikova</b> Multiperiodic solution of one hyperbolic system . . . . .	99
<b>Н.С. Иманбаев</b> К спектральному вопросу оператора Коши-Римана . . . . .	102
<b>Т. Ш. Кальменов, А.К. Лес</b> Определение плотности эллиптического потенциала	103
<b>С.А. Кассабек, А.А. Кавокин, Ю.Р. Шпади, Д.С. Кулахметова</b> Асимптотическое представление решения двухфазной задачи Стефана с областью, вырождающейся в начальный момент времени . . . . .	103
<b>М.Т. Космакова, Ж.М. Тулеутаева, Л.Ж. Касымова</b> Об одном неоднородном интегральном уравнении . . . . .	105
<b>М.Д. Кошанова, М.А. Муратбекова, Б.Х. Турметов</b> Об одной краевой задаче для нелокального уравнения Пуассона . . . . .	107
<b>Б.Д. Кошанов, Ж.Б. Султангазиева, А.Н. Емир Кадыоглы</b> О собственных числах краевой задачи для квазигиперболического уравнения высокого порядка	110
<b>Л.К. Кусаинова, Б.С. Кошкарова</b> О некоторых качественных характеристиках одномерных операторов с комплексными переменными коэффициентами . . . . .	111
<b>А.А. Калыбай, Д.С. Каратаева</b> Сопряженные и несопряженные свойства полупериодического уравнения второго порядка . . . . .	113

<b>A.A. Kulzhumiyeva, Zh.A. Sartabanov</b> Multiperiodic solutions of a semi-linear $D_c$ -equation . . . . .	115
<b>М. Рамазанов, А. Сейтмуратов, Н. Медеубаев, Г. Мукеева</b> Определения частот собственных колебаний методом декомпозиции . . . . .	117
<b>Ж.Р. Мырзакулова</b> Калибровочная эквивалентность между $\Gamma$ -спиновой системой и нелинейным уравнением Шредингера . . . . .	119
<b>М.Б. Муратбеков, Е.Н. Баяндиев</b> Существование и максимальная регулярность решений . . . . .	120
<b>М.В. Muratbekov, М.М. Muratbekov</b> Maximal regularity and two-sided estimates for the approximation numbers of solutions of the nonlinear Sturm-Liouville equation with rapidly oscillating coefficients in $L_2(r)$ . . . . .	122
<b>А.Р. Мырзақұл, Г.Н. Нугманова</b> Об эквивалентности системы манакова и обобщенного уравнения Ландау - Лифшица . . . . .	124
<b>К.Н. Оспанов, Р.Д. Ахметкалиева</b> Об эллиптической системе второго порядка с неограниченными промежуточными коэффициентами . . . . .	125
<b>М.Н. Оспанов</b> О свойствах решения псевдопараболического уравнения третьего порядка в бесконечной области . . . . .	127
<b>М. Отелбаев, Б.Д. Кошанов</b> Задачи управления точечным источником тепла .	128
<b>G. Oralsyn</b> Trace formula for the poisson potential for the time-fractional heat equation	131
<b>Zh.A. Sartabanov, G.M. Aitenova, G.A. Abdikalikova</b> Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with $D_c$ operator and $\epsilon$ -hereditary period . . . . .	133
<b>Zh.A. Sartabanov, В. Zh. Omarova</b> Research of multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with differentiation operator on the vector field . .	135
<b>А.А. Сарсенби</b> Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией . . . . .	137
<b>А.М. Сарсенби, М. Утелбаева</b> Разрешимость смешанной задачи для возмущенного волнового уравнения с инволюцией . . . . .	139
<b>М.А. Sadybekov, N. Kakharman</b> Riesz basis of root functions of periodic Sturm - Liouville problem with symmetric potential . . . . .	140
<b>М.А. Sadybekov, А.А. Dukenbayeva</b> Laplace operator with nonlocal Samarskii - Ionkin type boundary conditions in a disk . . . . .	141
<b>Y.T. Sultanaev, N.F. Valeev E.A. Nairova,</b> Spectral properties of differential operators with oscillating coefficients . . . . .	143
<b>К.Б. Тампагаров</b> Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с аналитическими функциями . . . . .	145
<b>Д.А. Турсунов, М.О. Орозов</b> Асимптотика решения задачи Дирихле для кольца с негладким коэффициентом . . . . .	147
<b>Zh.N. Tasmambetov, Zh.K. Ubayeva</b> Design of heterogeneous systems solution of differential equation in partial derivative of third order hypergeometric type . . . .	149
<b>Zh.N. Tasmambetov, А.А. Issenova</b> Properties of related systems solutions with whittaker type system . . . . .	151
<b>А.В. Tleulessova</b> On the solvability of a nonlinear periodic boundary value problem for an ode system with impulse actions . . . . .	153
<b>Б.Х. Турметов, К.И. Усманов</b> Об одном обобщении задачи Робена для уравнения Лапласа . . . . .	155
<b>Д.А. Турсунов, З.М. Сулайманов</b> Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи с внутренним слоем . . . . .	156

<b>M.I. Tleubergenov, G.I. Ibraeva</b> On the closure of stochastic differential equations of motion . . . . .	159
<b>Ye.M. Khairullin, G.A. Tulesheva, A.S. Azhibekova</b> A multidimensional boundary value problem of heat and mass transfer, when the boundary conditions contain higher-order derivatives . . . . .	161
<b>S.N. Kharin</b> Mathematical models of variuos forms of erosion in opening electrical contacts . . . . .	162
<b>S. Shaimardan, N.S. Tokmagambetov</b> The Bessel equation in h-discrete calculus .	164
<b>Т.Ж. Шугаева, И.Ф. Спивак-Лавров, Т.С. Калиматов</b> Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для трансаксиальных и осесимметричных систем	166
<b>Алгебра және модельдер теориясы</b>	<b>167</b>
<b>A.V. Altayeva, B.Sh. Kulpeshov</b> On almost omega-categoricity for quite o-minimal theories . . . . .	168
<b>Е.Р. Байсалов, У. Дауыл</b> О линейно минимальных квадратичных йордановых алгебрах . . . . .	170
<b>Е.Р. Байсалов, У. Дауыл</b> О линейных трехэтапных протоколах . . . . .	171
<b>T.P. Gou</b> On recurrent formulas for third-order horadam numbers . . . . .	172
<b>А.Р.Ешкеев, М.Т. Омарова, Г.А. Уркен</b> Подобия центральных типов наследственных теорий . . . . .	174
<b>А.Р. Ешкеев Г.Е. Жумабекова, Н.М. Мусина</b> Свойства категоричности и стабильности гибридов для наследственных теорий . . . . .	175
<b>А.Р. Ешкеев, А.К. Исаева, Н.М. Мусина</b> Свойства атомности модели для гибрида замыканий атомных множеств . . . . .	176
<b>A.S. Iskakova</b> The remark about modified chi-square estimation for polynomial distribution . . . . .	177
<b>М.Т. Kassymetova</b> Totally categorical universal classes of the robinson spectrum . .	179
<b>М. Manat</b> Ocomputable numberings in the Ershov hierarchy . . . . .	180
<b>А.Т. Нуртазин</b> Экзистенциально замкнутые Абелевы группы . . . . .	180
<b>О.И. Ульбрихт</b> Йонсоновская совершенность $j$ -категоричного модуля . . . . .	182



law

$$\gamma_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{T_1}} \exp\left(A - \frac{B}{T_1}\right). \quad (5)$$

The solution of this problem is obtained using the law of energy conservation with estimation of all acting forces and characteristic times of thermal and hydrodynamic processes.

### 3. Thermocapillary mechanism of erosion

Sometimes erosion phenomena can be explained by the influence of thermo-capillary Marangoni effect which provokes an intensive convective flow in a narrow surface layer of melting zone owing to temperature dependence of surface tension of liquid metal. To take into account this effect it is necessary to consider the special boundary condition for thermo-capillary forces causing radial stresses on the melted surface:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{d\sigma}{dT_1} \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad z = h_\nu(r, t), \quad (6)$$

where  $\mu$  is the dynamic viscosity and  $\sigma$  is the surface tension. It was shown in [2] that for tungsten with current density  $j = 6.45 \cdot 10^7 A/m^2$  and heat flux  $Q_0 = 3.2 \cdot 10^8 W/m^2$  the Marangoni number is  $Ma = 1.13 \cdot 10^2$ , while the rate of thermo-capillary convection  $V_r$  at the molten surface reaches  $13m/sec$ , thus causing the ejection of metal from the molten pool by the thermo-capillary forces.

## Reference

- [1] S.N. Kharin, *The Method of Majorant Functions for the Calculation of the Arc Erosion*. Proc. of 65th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, 15-18 September 2019, Milwaukee, USA.
- [2] S.N. Kharin, *Mathematical Models of Phenomena in Electrical Contacts*. The Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, A.P. Ershov Institute of Informatics System, Novosibirsk, 2017, pp. 1-193.

## THE BESSEL EQUATION IN H-DISCRETE CALCULUS

S. Shaimardan, N.S. Tokmagambetov

*L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*  
E-mail: *shaimardan.serik@gmail.com*

Let  $h > 0$  and  $\mathbb{T}_a = \{a, a + h, a + 2h, \dots\}$  with  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Definition 1** (see [1]) Let  $f : \mathbb{T}_a \rightarrow \mathbb{R}$ . Then the  $h$ -derivative of the function  $f(x)$  is defined by

$$D_h f(t) := \frac{f(\delta_h(t)) - f(t)}{h}, \quad t \in \mathbb{T}_a,$$

where  $\delta_h(t) = t + h$ .

**Definition 2** (see [1]). For arbitrary  $t, \alpha \in \mathbb{R}$  the  $h$ -fractional function is defined by

$$t_h^{(\alpha)} := h^\alpha \frac{\Gamma(\frac{t}{h} + 1)}{\Gamma(\frac{t}{h} + 1 - \alpha)},$$

where  $\Gamma$  is Euler gamma function, and

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_h^{(\alpha)} = t^\alpha.$$

Hence, by Definition 1 we find that

$$D_h \left( t_h^{(\alpha)} \right) = \alpha t_h^{(\alpha-1)}.$$

The classical Bessel functions are heavily studied special functions (see [2], [3]) that are defined via Bessel's differential equation

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2) y(t) = 0, \tag{1}$$

for some (possibly complex) parameter  $n$  called the order of the equation. In this paper, we propose the following discrete analogue of (1): the second-order delay difference equation

$$t_h^{(2)} D_h^2 y(t - 2h) + t_h^{(1)} D_h y(t - h) + t_h^{(2)} y(t - 2h) - n^2 y(t) = 0, \tag{2}$$

The solutions of Bessel's differential equation,  $J_n$ , are called Bessel functions (of the first kind) and have series representation

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1) 2^{2k+n}}.$$

**Theorem 1** *The function*

$$J_{n,h}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t_h^{(2k+n)}}{k! \Gamma(k+n+1) 2^{2k+n}},$$

*solves (2).*

## Reference

- [1] N.R.O. Bastos, R.A.C. Ferreira, and D.F.M. Torres, Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 29(2), 417–437 (2011).
- [2] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, vol. 55, For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. MR0167642
- [3] E. George Andrews, Richard Askey and Ranjan Roy, *Special functions*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR1688958