УДК 517.9: 515.16

БИЛИНЕАРИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

Жадыранова Алия Амирбековна
a.a.zhadyranova@gmail.com
Докторант Физико-технического факультета, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – К.Р. Мырзакулов

Введение. В данной работе рассматривается система уравнений ассоциативности, которая известна в двумерной топологической теории поля под названием системы Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV) [1, 2, 3]. Система дифференциальных уравнений WDVV описывает пространство модулей топологических конформных теорий поля [4, 5]. Б. Дубровин показал, что решения данной системы описывают дифференциально – геометрическую структуру, которая называется фробениусовой.

Система уравнений WDVV в общем виде выглядит следующим образом [6, 7]:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^p}\eta^{pq}\frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^\gamma \partial t^\delta} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^p}\eta^{pq}\frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^\alpha \partial t^\delta}, \tag{1}$$

где η является метрикой, $\eta^{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}, \alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q \in \{1,...,n\}$ и решение F должно удовлетворять следующим двум условиям:

1) условию нормализации:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}, \tag{2}$$

2) уравнению однородности:

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C, \quad A_{\alpha\beta}, B_\alpha, C = const, \tag{3}$$

где E - некоторое Эйлерово поле.

Уравнения WDVV представляют собой следующие условия на функцию $F(t^1,...,t^n)$ от n переменных:

1. Матрица $\eta_{\alpha\beta} := \dfrac{\partial^3 F(t)}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta}$ является постоянной, симметричной и невырожденной.

2. Функции $c^p_{\alpha\beta} = \eta^{pq} \dfrac{\partial^3 F(t)}{\partial t^q \partial t^\alpha \partial t^\beta}$, где $\eta^{pq} = \left(\eta_{pq}\right)^{-1}$, должны быть структурными константами некоторой ассоциативной алгебры.

Первые уравнения ассоциативности возникают при $n=3$. Дубровиным в [6] рассмотрены два существенно различных вида зависимости функции F от выделенной переменной t^1.

Переменная t^1 в уравнениях ассоциативности является изначально выделенной переменной, и задание произвольной постоянной невырожденной симметричной матрицы $\eta_{\alpha\beta}$ в соответствии с условием 1 на функцию F просто фиксирует зависимость этой функции от переменной t^1.

Если $\eta_{11} = 0$ и все корни $E(t)$ просты, то при линейном изменении координат t^α матрица $\eta_{\alpha\beta}$ может быть сведена к антидиагональной форме $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}$:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

В этих координатах F имеет вид:

$$F(t^1,t^2,t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2,t^3).$$

Объектом исследования в данной работе является трехмерный случай системы уравнений WDVV с метрикой, выглядящей следующим образом [8, 9]:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Тогда зависимость функции F от выделенной переменной t^1 с учетом метрики (4) имеет вид:

$$F(t^1,t^2,t^3) = \frac{1}{6}(t^1)^3 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2,t^3). \tag{5}$$

Для функции двух независимых переменных $f(t^2,t^3)$ в (5) уравнение однородности (3) записывается в виде:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^3} - \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^3} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^3} = 1. \tag{7}$$

Для удобства записи запишем (7) в виде нелинейного уравнения третьего порядка:

$$f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} = 1, \tag{8}$$

где $x = t^2, t = t^3$.

Дальнейшая наша задача - билинеаризация уравнения (8) для построения его решений с помощью одного из методов теории солитонов, а именно, методом Хироты.

Билинеаризация трехмерной системы WDVV

Система уравнений, соответствующая уравнению (8), в терминах функций *a, b, c* от переменных *x* и *t* записывается в виде:

$$\begin{cases} a_t = b_x \\ b_t = c_x \\ c_t = \left(\dfrac{1+bc}{a}\right)_x \end{cases} \tag{9}$$

где $a = f_{xxx}$, $b = f_{xxt}$, $c = f_{xtt}$ [1, 8].

Для нахождения билинейной формы каждого из уравнений системы (9) выразим функции a, b, c через действительные функции *G, H, K* и *F* от переменных *x, t:*

$$a = \frac{G}{F},\ b = \frac{H}{F},\ c = \frac{K}{F}. \tag{10}$$

Вычисляя необходимые производные в (10) по соответствующим переменным и учитывая оператор Хироты:

$$D_x^m D_t^n f(x,t) \cdot g(x,t) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x,t) \cdot g(x,t)|_{x=x',t=t'}, \tag{11}$$

из первого уравнения системы (9) получим:

$$D_t(G \cdot F) = D_x(H \cdot F), \tag{12.1}$$

из второго уравнения системы (9) имеем:

$$D_t(H \cdot F) = D_x(K \cdot F), \tag{12.2}$$

а из третьего уравнения системы (9) получим:

$$G^2 D_t(KF) = F^2 D_x(FG) + KGD_x(HF) + HFD_x(KG) \tag{12.3}$$

Заключение. В данной работе проделан первый этап нахождения решений уравнения (8) или соответствующей системы (9). Это означает, что нами были найдены билейные формы (12) для системы уравнений (9) с помощью метода Хироты. Нахождение различных решений системы (9), имеющих физические приложения, используя ее билинейные формы (12) является задачей дальнейшего исследования.

Список использованных источников

1. Mokhov O.I., Ferapontov Y.V. Equations of Associativity in Two-Dimensional Topological Field Theory as Integrable Hamiltonian Nondiagonalizable Systems of Hydrodynamic Type, Functional analysis and its applications 30(3), 1995. arXiv:hep-th/9505180

2. Witten E., On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity // Nucl. Phys.B 340. 1990. P. 281-332.

3. Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H., Notes on topological string theory and 2D quantum gravity // Nucl. Phys. 1991. P. 59.

4. Тришин В.Н., Геометрические и топологические структуры физики, // Сборник научных трудов РНОЦ. Вып. 4, 2009. С. 11-71.

5. Dubrovin B.A., On almost duality for Frobenius manifolds // Amer. Math. Soc. Transl. 2004. P. 75-132.

6. Dubrovin B.A. Geometry of 2D topological field theories // Springer Lecture Notes in Math. 1996. P. 120-348.

7. Dubrovin B.A., Novikov S.P. Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices // Uspekhi Mat.Nauk. 1989. P. 35-124.

8. Mokhov O.I. Symplectic and poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations, Translations of the American Mathematical Society-Series. 1995. P. 121-152.

9. Ferapontov E.V., Mokhov O.I., Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type that are connected with metrics of constant curvature // Russ. Math. Surv. 1990. P. 218-219.