УДК 517.957; 530.182

БЕЗДИСПЕРСИОННЫЙ ПРЕДЕЛ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА

Сагидуллаева Жанна Муратбековна
sagidullayeva.zh@gmail.com
Докторант Физико-технического факультета, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан,
Научный руководитель - Р. Мырзакулов

Структурно устойчивые уединенные волны, распространяющиеся в нелинейной среде называются солитонами. Благодаря своим особым свойствам солитоны ведут себя подобно частицам: при взаимодействии друг с другом или с некоторыми другими возмущениями они не разрушаются, а продолжают движение, сохраняя свою структуру неизменной. Данное свойство может использоваться для передачи данных на большие расстояния без помех, что открывает огромные возможности для использования солитонов. Условием возникновения солитонов является уравновешивание эффектов нелинейности и дисперсии. Нелинейность среды стемится опрокинуть фронт волны, сделав ее круче, дисперсия же напротив пытается рассеять волну, таким образом, при их балансе возникает солитон. Солитонные и солитоноподобные волны проявляются во многих областях физики и математики и описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с двумя и более независимыми переменными.

В данной работе рассматривается обобщенное уравнение Ландау-Лифшица (ОУЛЛ) с самосогласованным векторным потенциалом. Данная модель была предложена в работе [1], также для нее получены солитонные решения методом преобразования Дарбу [2-4], приведена билинеаризация и методом Хироты получено односолитонное решение [5].

Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом.

Матричная форма ОУЛЛ с самосогласованным векторным потенциалом представлена как

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{a}[S, W] = 0, \tag{1}$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \tag{2}$$

где $a = const$, $S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}$ матричный аналог спинового вектора, W - матричный вид векторного потенциала $W = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix}$.

ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом является интегрируемым и допускает следующее представление Лакса

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{3}$$

$$\Phi_t = V\Phi. \tag{4}$$

Здесь матричные операторы U и V задаются как

$$U = -i\lambda S,$$
$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left(\frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a}\right) W,$$

где $V_2 = -2iS, \quad V_1 = SS_x$.

Для удобства перепишем систему (1) - (2) в компонентах S и W

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a}(S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0, \tag{5}$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a}(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0, \tag{6}$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{2}{a}(S^- W^+ - S^+ W^-) = 0, \tag{7}$$

$$iW_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0, \tag{8}$$

$$iW_x^- - 2a(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0, \tag{9}$$

$$iW_{3x} - a(S^+ W^- - S^- W^+) = 0. \tag{10}$$

Бездисперсионный предел ОУЛЛ.

Далее будем преобразовывать только уравнения (5) и (8), так как, согласно граничным условиям, налагаемым на матричные функции S и W, $S_3 = \sqrt{1 - |S^+|^2}$, и аналогично, $W_3 = \sqrt{1 - |W^+|^2}$. С целью нахождения бездисперсионного предела (или квазиклассического предела) рассматриваемой модели, воспользуемся следующей заменой переменных $t \to \varepsilon t$, $x \to \varepsilon x$, где ε - постоянная [6]. В таком случае, соответствующие частные производные изменятся как

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, \ \frac{\partial}{\partial x} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}.$$

Тогда с учетом замены переменных, (5)-(8) перепишем как

$$i\varepsilon S_t^+ + \varepsilon^2 (S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+) + \frac{2}{a}(S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0, \tag{11}$$

$$i\varepsilon W_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0. \tag{12}$$

Теперь можно ввести масштабное преобразование для компонентов функций $S^+ = \sqrt{u_1} e^{\frac{i\chi}{\varepsilon}}$ и $W^+ = \sqrt{u_2} e^{\frac{i\chi}{\varepsilon}}$. Перепишем уравнения (11)-(12) в следующем виде

$$i\varepsilon \frac{u_{1t}}{2\sqrt{u_1}} - 2\sqrt{u_1}\chi_t + \sqrt{u_1(1-u_1)}\chi_x^2 - i\varepsilon u_{1x}\chi_x \sqrt{\frac{1-u_1}{u_1}} -$$

$$-i\varepsilon\sqrt{u_1(1-u_1)}\chi_{xx}+\frac{2}{a}\left(\sqrt{u_1(1-u_2)}-\sqrt{u_2(1-u_1)}\right)=0, \tag{13}$$

$$i\varepsilon u_{2x}-2u_2\chi_x-a\left(\sqrt{1-u_1}-\sqrt{\frac{u_1}{u_2}(1-u_2)}\right)=0. \tag{14}$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях ε получим систему уравнений

$$u_{1t}-2\sqrt{1-u_1}(u_1 v)_x=0, \tag{15}$$

$$v_t+(\sqrt{1-u_1}v^2)_x+\frac{2}{a}\left(\sqrt{u_1(1-u_2)}-\sqrt{u_2(1-u_1)}\right)_x=0, \tag{16}$$

$$u_2 v\ +2a\left(\sqrt{1-u_1}-\sqrt{\frac{u_1}{u_2}(1-u_2)}\right)=0, \tag{17}$$

где $v=\chi$. Таким образом, система уравнений (15)-(17) является квазиклассическим пределом обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с векторным потенциалом.

В данной работе с помощью масштабного преобразования получен бездисперсионный предел обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с векторным потенциалом. Полученная модель может применяться для описания спиновых волн в магнетиках и ферромагнетиках при отсутствии дисперсионных свойств среды. Что касается интегрируемости данной модели, то необходимо и достаточно условие наличия представления Лакса. По итогам данной работы, исследования в данном направлении выходят на новый этап, что позволит более детально изучить влияние эффектов дисперсии на поведение спиновой волны и ее взаимодействия с векторным потенциалом.

Список использованных источников

1. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. N., Lakshmanan M. A (2+1) dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. 1997. – V.233. P. 391-396.

2. Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G.N., Yesmakhanova K.R. Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials: Relation to Spin Systems and Soliton Equations // Phys. Lett. A. 2014. – V. 378, P. 2118-2123.

3. Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. Integrable (2+1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials // Symmetry 2015. – V.7, P. 1352.

4. Yersultanova Z., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R. Darboux transformation and exact solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2015. P.134-155.

5. Nugmanova G., Sagidullayeva Zh., Myrzakulov R. Hirota's method for a spin model with self-consistent potential // J. of Phys. Conf. Series. 2017. P. 120-135.

6. Brunelli J. C. Dispersionless Limit of Integrable Models // Braz.J.Phys. 2000. P. 455-468.