EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция
«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»
3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция
«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»
3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника принимали участие:
Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9 ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22.1

При росте тромбов в форме нитей необходимо использовать более сложные модели, включающие в себя решение уравнений Навье–Стокса в изменяющейся со временем области и различные способы описания переноса частиц. Для формирования тромбов сложной формы при больших числах Рейнольдса существенным становится наличие вихрей и возвратных течений, особенно при больших временах.

Список использованных источников

1. Leiderman K., Fogelson A., Grow with the flow: a spatial-temporal model of platelet deposition and blood coagulation under flow, Mathematical medicine and biology, 2011, №28, p.47-84.
2. Tosenberger, A.; Ataullakhanov, F.; Bessonov, N.; Panteleev, M.; Tokarev, A.; Volpert, V., Modelling of thrombus growth and growth stop in flow by the method of dissipative particle dynamics. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2012, 27, 507-522.
3. Kondratyev A., Lyaptsev A., Mikhailova I., Mathematical Modeling of Thrombus Growth, Applied Mathematical Sciences, 2015,Vol. 9, № 9, pp.429 - 446 .
4. J. Kim, D. Kim, H. Choi, An immersed-Boundary finite volume method for simulation of flow in complex geometries, Journal of Computational Physics, (2001), p. 171.
5. Ф.И. Атауллаханов, Г.Т. Гурия Пространственные аспекты динамики свертывания крови I Гипотеза // Биофизика,1994– т.39,вып.1 – с. 91-96.
6. Ф.И.Атауллаханов, Г.Т.Гурия, А.Ю.Сафрошкина. Пространственные аспекты динамики свертывания крови. II. Феноменологическая модель // Биофизика, 1994 –т.39, вып.1 – с. 97-104
7. А. Л. Чуличков, А. В. Николаев, А. И. Лобанов,Г. Т. Гурия, Пороговая активация свертываниякрови и рост тромба в условиях кровотока,Матем. Моделирование, 2000 –том 12, номер 3– с. 75–96
8. Ataullakhanov FI, Lobanova ES: Running pulses of complex shape in a reaction-diffusion model. Phys Rev Lett 2004;
9. Lobanova ES, Shnol EE, Ataullakhanov FI: Complex dynamics of the formation of spatially localized standing structures in the vicinity of saddle-node bifurcations of waves in the reaction-diffusion model of blood clotting. Phys Rev 2004;E 70: 032903.

УДК 519.8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

Сергибаев Р.А.
Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Астана
rassul_as@mail.ru

Математические методы теории систем массового обслуживания (СМО) обеспечивают возможность оценить вероятностно-временных характеристик узлов и компонент СМО, характеристик качества функционирования и рассчитать показатели эффективности её работы.

В теории массового обслуживания для исследования реального объекта важным этапом является формальное описание функционирования этого объекта. СМО считается заданной, если полностью описаны следующие ее компоненты [2, 4]:

- входящий поток требований (заявок, запросов);
- количество и типы обслуживающих устройств (приборов);
- длина очереди (емкости накопителей-буферов);
- время обслуживания заявок;
- дисциплина обслуживания (порядок обработки запроса).

Наиболее хорошо изученными системами массового обслуживания являются системы, в которых входящий поток заявок является простейшим. Для того, чтобы поток был простейшим, необходимо и достаточно, чтобы он был рекуррентным с показательным распределением длин интервалов между моментами поступления требований: $\mathrm{A}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Это свойство для показательной случайной величины ν в терминах условных вероятностей записывается следующим образом [2]:

$$P\{\nu \geq t + \tau | \nu \geq t\} = P\{\nu \geq \tau\}.$$

В классических приложениях теории потоков случайных событий рассматривается, как известно, в большинстве случаев лишь простейший вид таких потоков, когда вероятность наступления k событий в произвольно взятом промежутке времени длины t дается формулой [1,2]

$$\vartheta_k(\mathrm{t}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

где $\lambda > 0$ −постоянная.

Такой поток предполагается обычно потоком без последействия. Это означает, что для любой конечной подгруппы попарно не пересекающихся промежутков времени числа наступающих в этих промежутках событий представляют собой взаимно независимые случайные величины.

Относительно процесса обслуживания запросов в системе обычно предполагается, что обслуживание рекуррентное, то есть времена обслуживания последовательных запросов является независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Функция распределения обозначается обычно через $B(t)$. Предполагается, что $B(+0) = 0$, то есть исключается возможность мгновенного обслуживания заявки.

Процесс обработки требований (запросов) во многих реальных системах состоит из их последовательной обработки в нескольких обслуживающих устройствах. Системы такого вида получили название многофазных СМО и кодируются в виде последовательности символов [3, 4]

$$A_1|B_1|n_1|m_1 \rightarrow B_2|n_2|m_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_r|n_r|m_r \rightarrow,$$

где A_1 – входящий поток на вход цепочки из r последовательных обслуживающих устройств;

B_k, n_k, m_k (k=1,…,r) – соответственно, распределение времени обслуживания, число параллельных каналов и число мест в буфере для ожидания в k-м звене цепочки;

символ (→) – переход запроса на вход следующего обслуживающего устройства по окончании его обслуживания в предыдущем.

Для исследования выходящего потока системы $GI\big|GI\big|\infty$ рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, определяемый функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления его событий. Время обслуживания поступающих заявок будем считать случайным, с функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Обозначим $z(t)$–длину интервала от момента t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке, $n(t)$–число событий просеянного потока, наступивших к моменту времени t.

Будем исследовать двумерный марковский процесс $\{z(t), n(t)\}$ [5, 6].

Для распределения

$$P(z,n,t) = P\{z(t) < z, n(t) = n\}$$

можно записать следующие равенства:

$$P(z-\Delta t, n, t+\Delta t) = P(z,n,t) - P(\Delta t, n, t) +$$
$$+(1-S(t))P(\Delta t, n, t)A(z) + S(t)P(\Delta t, n-1, t)A(z) + 0(\Delta t).$$

Откуда получим систему дифференциальных уравнений Чэпмена- Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,n,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0,n,t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0,n-1,t)}{\partial z} S(t)A(z) + \frac{\partial P(0,n,t)}{\partial z}(1-S(t))A(z). \quad (1)$$

Обозначив

$$H(z,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(z,n,t), \quad (2)$$

где $j = -1$ – мнимая единица, из системы (1) получим уравнение для функций $H(z,u,t)$

$$\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z} - \left\{1 - A(z)\left[(e^{ju}-1)S(t)+1\right]\right\}\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z}. \quad (3)$$

Будем полагать, что $B(x)=B_1(x/b)$, где $B_1(x)$ – заданная функция распределения случайной величины с единичным математическим ожиданием. Обозначим $\varepsilon = 1/\ b$, в уравнении (3) выполним замены

$$\tau = \varepsilon t,\ H(z,u,t) = F(z,u,\tau,\varepsilon),\ S(t) = S_1(\tau,\varepsilon), \quad (4)$$

где $S_1(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} B_1(T_1-\tau+\varepsilon T) - B_1(T_1-\tau), & 0<\tau\le T_1, \\ B(T_1-\tau+\varepsilon T), & T_1 < t \le T_1+\varepsilon T. \end{cases}$

Полагая, что функция $B_1(x)$ дважды дифференцируема, вероятность $S_1(\tau,\varepsilon)$ можно записать в виде

$$S_1(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon\, T B_1(T_1-\tau) + O(\varepsilon^2), & 0<\tau\le T_1, \\ O(\varepsilon^2), & T_1<\tau\le T_1+\varepsilon T. \end{cases} \quad (5)$$

тогда для $F(z,u,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \left\{1 - A(z)\left[\left(e^{ju}-1\right)S_1(\tau,\varepsilon)+1\right]\right\}\frac{\partial F(0,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z}. \quad (6)$$

Имеет место следующая теорема [5, 6].

Теорема. Предельное, при $\varepsilon\to 0$, значение $F(z,u,\tau)$ решения $F(z,u,\tau,\varepsilon)$уравнения (6) имеет вид

$$F(z,u,\tau) = \frac{1}{a} exp\left\{\frac{1}{a}T\left(e^{ju}-1\right)[B_1(T_1) - B_1(T_1-\tau)]\right\}\int_0^z (1-A(y))dy, \quad (7)$$

где величина a определена равенством

$$a = \int_0^{\infty}(1-A(y))dy \ (8)$$

Выполнив предельный переход при $z \to \infty$, учитывая $F(z,u,\tau)\overrightarrow{z\to\infty}\quad F(u,\tau)$, получим функцию $F(u,\tau)$:

$$F(u,\tau) = exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B_1(T_1)-B_1(T_1-\tau)]\right\}. \tag{9}$$

Тогда с учетом замен (4) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, приближенное равенство

$$H(u,t) = H(\infty,u,t) = F(u,\tau,\varepsilon) \approx F(u,\tau) =$$
$$= exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B_1(T_1)-B_1(T_1-\tau)]\right\} = exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B(bT_1)-B(bT_1-t)]\right\},$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)}H(u,t) \approx exp\left\{\left(e^{ju}-1\right)\frac{1}{a}TB(t)\right\}.$$

При $t = bT_1$получим

$$Me^{jun(bT_1)} = Me^{jum(bT_1,T)} \approx exp\left\{\left(e^{ju}-1\right)\frac{1}{a}TB(bT_1)\right\},$$

устремляя в котором $T_1\to\infty$ для характеристической функции величины $m(T)$ получим

$$Me^{jun(T)}H(u,bT_1) \approx exp\left\{\left(e^{ju}-1\right)\frac{1}{a}T\right\}. \tag{10}$$

Таким образом, мы получили, что в условиях растущего времени обслуживания число обслуженных заявок в системе $GI|GI|\infty$ за время T имеет распределение Пуассона с параметром T/a, где a – среднее значение длины интервала между моментами наступления событий в рекуррентном потоке. Следовательно, выходящий поток этой системы в условиях растущего времени обслуживания является простейшим, интенсивность которого в стационарном режиме функционирования системы массового обслуживания естественно совпадает с интенсивностью $1/a$ входящего потока.

Теперь рассмотрим линейную двухфазную систему массового обслуживания, с последовательными каналами, в которой распределение выходящего потока одного канала является входящим потоком для следующего канала [3, 4].

Входящий поток с интенсивностью λ считается простейшим, а также время пребывания требований на каждой фазе есть экспоненциально распределенная случайная величина с параметром μ_1 для первой и μ_2 – для второй фазы. При этом вероятность перехода требования с первой фазы на вторую равна r, а с вероятностью $1-r$ - покидает систему.

Состояние данной системы определим двумерным вектором $\{i,j\}$, где i – количество требований на первой фазе, j – количество требований на второй фазе. Изменение данного вектора во времени образует марковский процесс $\{i(t),j(t)\}$. Введем следующее обозначение $P(i,j,t) = P(i(t)=i, j(t)=j)$.

В случае пуассоновского потока с параметром λ, поступающего в первый из двух последовательных каналов, имеющих экспоненциальное время обслуживания с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно, имеем следующие уравнения для переходного состояния [3, 4]:

$$\frac{\partial P(i,j,t)}{\partial t}+\left(\lambda+i\mu_1+j\mu_2\right)P(i,j,t)=\lambda P(i-1,j,t)+(i+1)\mu_1(1-r)P(i+1,j,t)+ \\ +(i+1)\mu_1 rP(i+1,j-1,t)+(j+1)\mu_2 P(i,j+1,t) \tag{11}$$

и заданным начальным условиям $P(i,j,t_0)=P_0(i,j)$.

Найдем стационарное распределение вероятностей $P(i,j)$ состояния СМО. Полагаем, что $t_0 \to -\infty$, тогда производящая функция имеет вид:

$$\Pi(x,y)=g(1{,}1)\times\exp\left\{(x-1)\frac{\lambda}{\mu_1}\right\}\times\exp\left\{(y-1)\frac{\lambda r}{\mu_2-\mu_1}\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{(x-1)\frac{\lambda}{\mu_1}\right\}\times\exp\left\{(y-1)\frac{\lambda r}{\mu_2}\right\}, \tag{12}$$

из которого следует, что $P(i,j)=P_1(i)P_2(j)$,

где $P_1(i)=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^i\frac{1}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}}$, $P_2(j)=\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^j\frac{1}{j!}e^{-\frac{\lambda}{\mu_2}}$.

Полученное распределение $P(i,j,t)$ дает возможность сделать вывод о том, что аналогично случаю стационарного режима, в нестационарном режиме компоненты $i(t)$ и $j(t)$ в один и тот же момент времени t также являются стохастически независимыми и подчиняются распределению Пуассона.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.:Знание, 1976. 203с.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. –М.: КомКнига, 2005
3. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. –М.: Физматлит, 2004
4. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания. – М.: Советское радио, 1971, 570 с.
5. Сарымсаков Т.А. Основы теории процессов Маркова. М.:Гос.издательство технико-теоретической литературы. 1954. 208с.
6. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.:Гос.издательство физико-математической литературы, 1963. 528с.

ҚИЫНДЫҚ ДЕҢГЕЙІ ӘРТҮРЛІ СҰРАҚТАРДАН ТҰРАТЫН ОБЪЕКТИВТІ ЖӘНЕ БІРДЕҢГЕЙЛІ ТЕСТ ҚҰРУ АЛГОРИТМІ

Төлебаева Г.М.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

E-mail: gulnau_94@mail.ru

Ғылыми жетекші Габбасов М.Б.

Білім мен техника дамыған бүгінгі заманда оқу орындарында білім алушылардың алған білімдерін сараптау тұрғысында тестілеу тәсілі күннен күнге кең етек алып келеді. Сөйте тұра бүгінгі күнге дейін тестті дайындау мен оның нәтижесін талдау жөнінде белгілі бір заңдылыққа негізделген тұжырымдар аз. Ғылыми негізделіп, дұрыс құрастырылған тестті жүйелі пайдалану оқыту сапасын жақсартуға көмектеседі. Студенттер мен оқушылардың білімін тексеру үшін тестілеуді кеңінен енгізу білімді тексерудегі тестілеу жүйесінің теориялық негізін жасауды және тестті құру мен тест нәтижелерін қайта өңдеуге дейінгі