EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника принимали участие:
Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9 ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22.1

$$L_\alpha \overline{W}_1 = 0,\ \ (x,t) \in Q_1 \qquad\qquad \frac{\partial \overline{W_1}}{\partial n} = 0,\ \ (x,t) \in \gamma_t$$

$$\overline{W}_1(x,0) = 0,\ \ \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial t}(x,0) = 0,\ \ x \in D_1 \qquad \overline{W}_1(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in \Gamma_t$$

отсюда получим $\overline{W}_1 = 0,$ или$\overline{W}_1^+ = -\overline{W}_1^-$

Далее введем $\bar{V}_1 = \bar{V}_1^+ + \bar{V}_1^-$, функция $\bar{V}_1$ удовлетворяет задаче

$$\mathrm{L}\vec{V}_1 = 0, (x,t) \in Q\vec{V}_1(x,0) = 0, \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in D$$

$$\bar{V}_1(x,t) = 0,\ \ (\mathrm{x,t}) \epsilon \gamma_t$$

откуда имеем $\bar{V}_1 = 0,$ или $\bar{V}_1{}^+ = -\bar{V}_1{}^-$

Последовательно вводя $\overline{W_2} = \overline{W_2}^+ + \overline{W_2}^-, \bar{V}_2 = \bar{V}_2{}^+ + \bar{V}_2{}^-$, получим $\overline{W_2}^+ = \overline{W_2}^-, \bar{V}_2{}^+ = \bar{V}_2{}^-$, продолжая этот процесс придем $\overline{V_k}^+ = \overline{V_k}^-$, если к – четно,$\overline{V_k}^+ = -\overline{V_k}^-$ если к – нечетно (21).

Используя (21) подставив (19),(20), имеем

$$\bar{\sigma}_+^\alpha = \bar{\sigma} + \alpha \bar{V}_1{}^+ + \alpha_2 \bar{V}_2{}^+ + \cdots$$

$$\bar{\sigma}_-^\alpha = \bar{\sigma} - \alpha \bar{V}_1{}^+ + \bar{V}_2{}^+ + \cdots$$

Применяя разложения (22), а также оценку (17) при 0 <α < α_1, получим

$$\left\|\bar{\sigma} - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_+^\alpha + \bar{\sigma}_-^\alpha)\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le \alpha^2 \left\|\bar{V}_2{}^+ + \alpha^2 \bar{V}_4{}^+ + \cdots\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le\le C_8 \alpha^2 \left\|\bar{V}_0{}^+\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le$$

$$C_9\, \alpha^2 \left|\left|\bar{F}\right|\right|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \left|\left|\bar{g}\right|\right|_{\dot{W}_2^1(D)} \mathrm{dt} + \left|\left|\bar{p}\right|\right|_{L_{2(D)}})$$

Литература

[1]. Букенов М.М. Постановка динамической задачи линейной вязкоупругости в скоростях напряжений РАН. Сиб.отделение – Новосибирск, Сибирский журнал вычислительной математики, 2005.-т.8, №4, С.289-295

[2]. Пацюк В.И. Стационирование динамических процессов в вязкоупругих средах: Дис… канд. физ.-мат.-наук-Новосибирск, 1982.

[3]. Букенов М.М. Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис… канд. физ.- мат.- наук- Новосибирск,1986.

[4]. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1973, т. 1, №2, С.109-115

[5]. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1972, т. 3, №5, С.52-67.

[6]. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей. // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1975. С.191-199.

[7]. Chertova.K. Locally two-sided approximate solutions in parabolic problems. Bull. Nov. Comp. Center, 1994, Num. Anal., 6, 37-42.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ТОВАРОВ И УСЛУГ ПО ГРУППАМ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Габбасов М.Б.

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

gmarson19@gmail.com

Эластичность спроса является мощным инструментом принятия решений для бизнеса в условиях неопределенности. До сих пор этот инструмент не находит широкого применения на практике из-за отсутствия достаточно точных методов расчета эластичности и из-за сложности сбора необходимых данных для расчета. Предлагаемая методология описывает методику расчета эластичности спроса на товары и услуги по группам потребителей услуг и товаров. Методика определения эластичности основана на балансовой модели определения эластичности, на предположении о неизменности вкусов потребителей при пропорциональном росте доходов и цен и позволяет рассчитывать:

1) прямую эластичность спроса по цене,

2) перекрестную эластичность спроса по цене,
3) эластичность спроса по доходу,

Достоинством данной методики является возможность ее применения для расчета эластичностей спроса на микро-, мезо- и макроэкономических уровнях.

Эластичность — (от греческого *elasticos* — гибкий, упругий) мера реагирования одной переменной величины (функции) к изменению другой величины. Иначе, эластичность – это число, которое показывает процентное изменение одной переменной в результате однопроцентного изменения другой переменной. Мерой измерения эластичности является коэффициент эластичности. Математически коэффициент эластичности $\varepsilon(f,g)$ функции $f(x)$ относительно функции $g(x)$ выражают формулой $\frac{\frac{df(x)}{f(x)}}{\frac{dg(x)}{g(x)}}$, где $df(x)$ и $dg(x)$ есть дифференциалы функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Как видно из определения коэффициент эластичности является безразмерной величиной. Заметим, что $\varepsilon(f,g)\cdot\varepsilon(g,f)=1$.

Для определения эластичности спроса, эластичности предложения и эластичности цены приведем необходимые определения.

Цена – количество денег, в обмен на которые продавец готов передать (продать), а покупатель купить единицу товара или услуги. Цена есть стоимость единицы товара или услуги. Цены бывают розничные и оптовые. Цену на i –ый товар или услугу будем обозначать резp_i.

Спрос — подкрепленное денежной возможностью желание, намерение покупателей, потребителей приобрести данный товар или услугу. Спрос характеризуется его величиной, означающей количество товара (услуги), которое покупатель желает и способен приобрести по данной цене в данный период времени. Величина спроса зависит как от цены на товар (услугу), так и от других, неценовых факторов, таких, как мода, доходы потребителей, а также от цены на другие товары (услуги), в том числе на товары-заменители и на сопряженные, сопутствующие товары. Величину спроса на i –ый товар или услугу будем обозначать через V_i. Различают следующие виды спроса:

- индивидуальный спрос — спрос одного лица,
- рыночный спрос — спрос на данном рынке,
- совокупный спрос — спрос на всех рынках данного товара (услуги) или на все производимые и продаваемые товары (услуги).

Доходы – денежные средства или материальные ценности, полученные государством, физическим или юридическим лицом в результате какой-либо деятельности за определенный период времени. Доходом являются любые притоки денежных средства за определенный период, которые можно потратить на необходимые нужды (потребности). Доход j –го потребителя или j –ой группы потребителей будем обозначать R_j.

Доля дохода потребителя – отношение расходов потребителя на приобретение товара или услуги к его доходу. Потребитель или группа потребителей тратят свои доходы, полученные за определенный период на приобретение различных товаров и услуг. Неизрасходованная часть дохода потребителя за определенный период составляет его сбережения. Сумма всех расходов потребителя на приобретение различных товаров и услуг равна разности его дохода и сбережений. Иначе говоря, сумма долей доходов потребителя и доли сбережений равна единице. Долю дохода j –го потребителя или j –ой группы потребителей на приобретение $i-$ ого товара или услуги будем обозначать q_{ji}.

Будем рассматривать эластичности спроса, эластичности цены и эластичности доли доходов потребителя (покупателя). Рассмотрим эти понятия более подробно. Для каждой из этих функций различают прямую эластичность по цене, перекрестную эластичность по цене и эластичность по доходу. Таким образом, определим следующие эластичности, необходимые для построения нашей теории:

1) прямая эластичность спроса по цене,

2) перекрестная эластичность спроса по цене,
3) эластичность спроса по доходу потребителей,
4) прямая эластичность цены по цене,
5) перекрестная эластичность цены по цене,
6) эластичность цены по доходу потребителей,
7) прямая эластичность доли дохода потребителей по цене,
8) перекрестная эластичность доли дохода потребителей по цене,
9) эластичность доли дохода потребителей по доходу потребителей,

По определению коэффициент прямой эластичности спроса по цене на i −ый товар или услугу для j −ой группы потребителей равен $\varepsilon\left(V_{ji}, p_{ji}\right) = \frac{\frac{dV_{ji}}{V_{ji}}}{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}$, где V_{ji} – величина спроса j −ой группы потребителей на i −ый товар или услугу, p_{ji} – цена i −го товара или услуги для j −ой группы потребителей. Прямая эластичность спроса по цене показывает относительное изменение спроса на i −ый товар или услугу при изменении цены на этот товар или услугу. Как правило, коэффициент прямой эластичности спроса по цене является отрицательной величиной, что соответствует факту, что если цена на i −ый товар увеличивается ($dp_{ji} > 0$), то величина спроса на него падает ($dV_{ji} < 0$), и наоборот, если цена на i −ый товар падает ($dp_{ji} < 0$), то величина спроса растет ($dV_{ji} > 0$). Бывает случаи, когда коэффициент прямой эластичности спроса больше нуля, что соответствует товарам роскоши.

Коэффициент перекрестной эластичности спроса по цене выражает относительное изменение величины спроса на один товар или услугу при изменении цены на другой товар или услугу и определяется формулой $\varepsilon\left(V_{ji}, p_{jk}\right) = \frac{\frac{dV_{ji}}{V_{ji}}}{\frac{dp_{jk}}{p_{jk}}}$, где V_{ji} – величина спроса j −ой группы потребителей на i −ый товар или услугу, p_{jk} – цена k −го товара или услуги для j −ой группы потребителей. Коэффициент перекрестной эластичности может быть положительным, отрицательным или нулевым.

Если $\varepsilon\left(V_{ji}, p_{jk}\right) > 0$, то товары (услуги) i и k называют взаимозаменяемыми. Для таких товаров повышение цены на k −ый товар ($dp_{jk} > 0$) ведет к увеличению спроса на i −ый товар ($dV_{ji} > 0$) и уменьшение цены на k −ый товар ($dp_{jk} < 0$) ведет к уменьшению спроса на i −ый товар ($dV_{ji} < 0$). Если $\varepsilon\left(V_{ji}, p_{jk}\right) < 0$, то товары (услуги) i и k называют взаимодополняющими. Для таких товаров повышение цены на k −ый товар ($dp_{jk} > 0$) ведет к уменьшению спроса на i −ый товар ($dV_{ji} < 0$) и уменьшение цены на k −ый товар ($dp_{jk} < 0$) ведет к увеличению спроса на i −ый товар ($dV_{ji} > 0$). Если $\varepsilon\left(V_{ji}, p_{jk}\right) = 0$, то товары (услуги) i и k называют независимыми. Для таких товаров изменение цены одного из них не влияет на величину спроса на другой товар.

Коэффициент эластичности спроса по доходу потребителей выражает относительное изменение величины спроса на один товар или услугу при изменении доходов потребителей и определяется формулой $\varepsilon\left(V_{ji}, R_j\right) = \frac{\frac{dV_{ji}}{V_{ji}}}{\frac{dR_j}{R_j}}$, где V_{ji} – величина спроса j −ой группы потребителей на i −ый товар или услугу, R_j – доход j −ой группы потребителей. Коэффициент эластичности спроса по доходу может быть как отрицательной, так и положительной величиной.

Если $\varepsilon\left(V_{ji}, R_j\right) < 0$, то такой товар (услуга) называется низкокачественным. Для таких товаров увеличение дохода потребителей ($dR_j > 0$) приводит к падению спроса на товар ($dV_{ji} < 0$), и наоборот, падение дохода потребителей ($dR_j < 0$) приводит к повышению спроса на товар ($dV_{ji} > 0$). Если $\varepsilon\left(V_{ji}, R_j\right) > 0$, то такой товар (услуга) называется нормальным. Для таких товаров (услуг) с ростом дохода потребителей увеличивается и спрос на эти товары (услуги). Среди нормальных товаров можно выделить три группы: товары первой необходимости, спрос на которые растет медленнее роста доходов ($\varepsilon(V_{ji}, R_j) < 1$), товары второй необходимости, спрос на которые растет по мере роста доходов ($\varepsilon(V_{ji}, R_j) = 1$), и предметы роскоши, спрос на которые опережают рост доходов ($\varepsilon(V_{ji}, R_j) > 1$).

Коэффициент прямой эластичности цены по цене по определению есть эластичность цены одного товара (услуги) по цене этого же товара (услуги) и выражается формулой $\varepsilon(p_{ji}, p_{ji}) = \frac{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}} = 1$, где p_{ji} – цена i –го товара или услуги для j –ой группы потребителей или производителей. Таким образом, прямая эластичность цены по цене всегда равна единице и не представляет практического интереса.

Коэффициент перекрестной эластичности цены по цене есть эластичность цены одного товара (услуги) по цене другого товара (услуги) и выражается формулой $\varepsilon(p_{ji}, p_{jk}) = \frac{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}{\frac{dp_{jk}}{p_{jk}}}$, где p_{ji} и p_{jk} – цены i –го и k –го товаров (услуг) соответственно для j –ой группы потребителей или производителей. Между ценами разных товаров могут существовать зависимости, обусловленные бизнес процессами производства этих товаров. Например, при повышении цены на электроэнергию повышаются цены на многие товары и услуги, так как стоимость электроэнергии составляет часть себестоимости этих товаров и услуг. С другой стороны цены разных товаров могут быть совершенно независимыми, в этом случае рассчитывать перекрестную эластичность одной цены по другой цене не имеет смысла. То есть, если между ценами нет никаких стохастических связей, то перекрестная эластичность цены равна нулю и в этом случае не выполняется соотношение $\varepsilon(p_{ji}, p_{jk}) \cdot \varepsilon(p_{jk} \cdot p_{ji}) = 1$.

Коэффициент эластичности цены по доходу потребителей выражает относительное изменение цены при изменении доходов потребителей и определяется формулой $\varepsilon(p_{ji}, R_j) = \frac{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}{\frac{dR_j}{R_j}}$, где p_{ji} – цена i –го товара или услуги для j –ой группы потребителей, R_j – доход j –ой группы потребителей. Коэффициент эластичности цены по доходу может быть как отрицательной, так и положительной величиной. Для низкокачественных товаров $\varepsilon(p_{ji}, R_j) < 0$, для нормальных товаров $\varepsilon(p_{ji}, R_j) > 0$.

В зависимости от изменения цены и дохода меняется также структура расходов потребителя и, соответственно, эластичность доли дохода потребителя.

Коэффициент прямой эластичности доли дохода потребителей по цене определяется формулой $\varepsilon(q_{ji}, p_{ji}) = \frac{\frac{dq_{ji}}{q_{ji}}}{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}$, где q_{ji} – доля дохода j –ой группы потребителей на приобретение i –го товара или услуги, p_{ji} – цена i –го товара или услуги для j –ой группы потребителей. Коэффициент прямой эластичности доли дохода потребителей по цене показывает относительное изменение доли дохода потребителей, приходящейся на данный товар или услуги при изменении цены на этот товар или услугу. Коэффициент прямой эластичности доли дохода потребителей по цене может быть как отрицательной, так и положительной величиной. При повышении цены на данный товар доля дохода потребителя, расходуемая на данный товар, увеличивается при неизменном объеме потребления, с другой стороны спрос (объем потребления) данного товара падает, так как потребитель может переключиться на товары-заменители. Если при этом доля дохода потребителя увеличивается, то это говорить о том, что данный товар является значимым для данной группы потребителей.

Коэффициент перекрестной эластичности доли дохода потребителей по цене определяется формулой $\varepsilon(q_{ji}, p_{jk}) = \frac{\frac{dq_{ji}}{q_{ji}}}{\frac{dp_{jk}}{p_{jk}}}$, где q_{ji} – доля дохода j −ой группы потребителей на приобретение i −го товара или услуги, p_{jk} – цена k −го товара или услуги для j −ой группы потребителей. Коэффициент перекрестной эластичности доли дохода потребителей по цене показывает относительное изменение доли дохода потребителей, приходящейся на i −ый товар или услугу при изменении цены на k −ый товар или услугу.

Коэффициент эластичности доли дохода потребителей по доходу потребителей для j −ой группы потребителей определяется формулой $\varepsilon(q_{ji}, R_j) = \frac{\frac{dq_{ji}}{q_{ji}}}{\frac{dR_j}{R_j}}$, где q_{ji} – доля дохода j −ой группы потребителей на приобретение i −го товара или услуги, R_j – доход j −ой группы потребителей. Коэффициент эластичности доли дохода по доходу показывает относительное изменение доли дохода потребителей, приходящейся на i −ый товар или услуги при изменении общего дохода потребителей.

Модель расчета эластичностей спроса позволяет рассчитывать определенные выше эластичности спроса, цены и доли дохода потребителя. Для расчета эластичности спроса предположим, что заданы определенное количество товаров и услуг и выбраны определенные группы потребителей, которые потребляют эти товары и услуги. Построим следующую таблицу 1, где по столбцам расположены группы потребителей, а по строкам – выбранные товары (услуги).

Таблица 1.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	…	Группа потребителей m	Объем потребления
Товар (услуга) 1	V_{11}	V_{21}	…	V_{m1}	V_1
Товар (услуга) 2	V_{12}	V_{22}	…	V_{m2}	V_2
….	…	…	…	…	…
Товар (услуга) n	V_{1n}	V_{2n}	…	V_{mn}	V_n

В каждой ячейке таблицы находятся объем потребления товара (услуги) i группой потребителей j, в ячейках последнего столбца находятся общие объемы потребления i −го товара (услуги). Для данной таблицы выполняются балансовые уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} V_{ji} = V_i \text{ для всех } i = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

Умножим каждую ячейку таблицы 1 на цену (тарифы) i −го товара (услуги) для j −ой группы потребителей p_{ji}, а последний столбец на среднюю цену (тариф) i −го товара (услуги) p_i, которая определяется по формуле $p_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} V_{ji} \cdot p_{ji}}{V_i}$. В результате получим таблицу 2.

Таблица 2.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	…	Группа потребителей m	Объем потребления
Товар (услуга) 1	$V_{11} \cdot p_{11}$	$V_{21} \cdot p_{21}$	…	$V_{m1} \cdot p_{m1}$	$V_1 \cdot p_1$
Товар (услуга) 2	$V_{12} \cdot p_{12}$	$V_{22} \cdot p_{22}$	…	$V_{m2} \cdot p_{m2}$	$V_2 \cdot p_2$
….	…	…	…	…	…
Товар (услуга) n	$V_{1n} \cdot p_{1n}$	$V_{2n} \cdot p_{2n}$	…	$V_{mn} \cdot p_{mn}$	$V_n \cdot p_n$

Доходы групп потребителей	R_1	R_2	…	R_m	$\sum_{j=1}^{m} R_j$

Последняя строка таблицы содержит доходы групп потребителей. Для этой таблицы соблюдаются балансовые уравнения

$\sum_{j=1}^{m} V_{ji} \cdot p_{ji} = V_i \cdot p_i$ для всех $i = 1,2, \dots, n$. (2)

Из таблицы 2 видно, каким образом распределен общий объем потребления каждой услуги по группам потребителей (балансовые соотношения (2)). С другой стороны, если анализировать каждый столбец таблицы 2, то видно какую часть доходов каждая группа потребителей тратить на какие услуги. Как правило, $\sum_{i=1}^{n} V_{ji} \cdot p_{ji} \leq R_j$ для каждого $j = 1,2, \dots, m$. Разницу между правой и левой частями последнего неравенства потребители тратят на другие услуги и на сбережение. Если эта разница отрицательна, то это означает, что потребители потратили сбережения прошлых периодов. Добавим таблице 2 еще одну строку перед последней строкой, в которую напишем разницу $V_{j,n+1} = R_j - \sum_{i=1}^{n} V_{ji} \cdot p_{ji}$, которую назовем «сбережениями» (таблица 3). Термин «сбережения» здесь носит условный характер.

Таблица 3.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	…	Группа потребителей m	Объем потребления
Товар (услуга) 1	$V_{11} \cdot p_{11}$	$V_{21} \cdot p_{21}$	…	$V_{m1} \cdot p_{m1}$	$V_1 \cdot p_1$
Товар (услуга) 2	$V_{12} \cdot p_{12}$	$V_{22} \cdot p_{22}$	…	$V_{m2} \cdot p_{m2}$	$V_2 \cdot p_2$
….	…	…	…	…	…
Товар (услуга) n	$V_{1n} \cdot p_{1n}$	$V_{2n} \cdot p_{2n}$	…	$V_{mn} \cdot p_{mn}$	$V_n \cdot p_n$
Сбережения (товар n+1)	$V_{1,n+1} \cdot 1$	$V_{2,n+1} \cdot 1$	…	$V_{m,n+1} \cdot 1$	$V_{n+1} \cdot 1$
Доходы групп потребителей	R_1	R_2	…	R_m	$\sum_{j=1}^{m} R_j$

Единицей измерения сбережений является денежная единица, поэтому ее цена равна единице, что отражено в таблице 3 в предпоследней строке. Для таблицы 3 выполняются балансовые соотношения (2) для всех строк $i = 1,2, \dots, n+1$ и соотношения

$\sum_{i=1}^{n+1} V_{ji} \cdot p_{ji} = R_j$ для всех $j = 1,2, \dots, m$. (3)

В этих соотношениях $p_{j,n+1} = 1$ для всех $j = 1,2, \dots, m$. Поделим каждый столбец таблицы 3 на R_j. Получим следующую таблицу 4.

Таблица 4.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	…	Группа потребителей m
Товар (услуга) 1	q_{11}	q_{21}	…	q_{m1}
Товар (услуга) 2	q_{12}	q_{22}	…	q_{m2}
…	…	…	…	…
Товар (услуга) n	q_{1n}	q_{2n}	…	q_{mn}
Сбережения $(n+1)$	$q_{1,n+1}$	$q_{2,n+1}$	…	$q_{m,n+1}$

В каждой ячейке таблицы 4 находятся доли дохода группы потребителей и справедливы балансовые соотношения

$\sum_{i=1}^{n+1} q_{ji} = 1$ для всех $j = 1,2, \dots, m.$ (4)

По определению $q_{ji} = \frac{V_{ji} \cdot p_{ji}}{R_j}$ для всех $i = 1,2, \dots, n+1, j = 1,2, \dots, m$. Величина спроса j −ой группы потребителей V_{ji} и доля дохода j −ой группы потребителей q_{ji} являются функциями от $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{ji}, \dots p_{jn}, p_{j,n+1}, R_j$, так как на величину спроса влияют цены (тарифы) на данную и другие товары (услуги) и доходы данной группы потребителей. Тогда перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$V_{ji}(p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{ji}, \dots, p_{jn}, p_{j,n+1}, R_j) = \frac{q_{ji}(p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{ji}, \dots, p_{jn}, p_{j,n+1}, R_j) \cdot R_j}{p_{ji}}, \qquad (5)$$

для всех $j = 1,2, \dots, m, i = 1,2, \dots, n+1$.

Вычислим эластичность спроса по цене. По определению дифференциал функции V_{ji} равен

$$dV_{ji} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial V_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{\partial V_{ji}}{\partial R_j} dR_j = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{R_j}{p_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{q_{ji}}{p_{ji}} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} dp_{jk} - \frac{q_{ji} \cdot R_j}{p_{ji} \cdot p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} \right) +$$
$$+ \frac{R_j}{p_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j + \frac{q_{ji}}{p_{ji}} dR_j - \frac{q_{ji} R_j}{p_{ji} p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} dR_j$$

Отсюда поделив на V_{ji} получим

$$\frac{dV_{ji}}{V_{ji}} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{1}{R_j} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} dp_{jk} - \frac{1}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} \right) + \frac{1}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j + \frac{dR_j}{R_j} - \frac{1}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} dR_j. \qquad (6)$$

Тогда эластичность спроса по цене

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dp_{jl}} + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dp_{jl}} - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dp_{jl}} \right) +$$
$$+ \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}} + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}} - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}}.$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{1}{dp_{jl}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} dp_{jk} - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} +$$
$$+ \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{1}{dp_{jl}} dR_j - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} dR_j,$$

Собирая подобные члены и пользуясь определением дифференциала получим

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{dq_{ji}}{dp_{jl}} + 2 \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}} - 2 \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{dp_{ji}}{dp_{jl}},$$

или

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \varepsilon(q_{ji}, p_{jl}) + 2\varepsilon(R_j, p_{jl}) - 2\varepsilon(p_{ji}, p_{jl}). \qquad (7)$$

Полученная формула выражает связь между коэффициентами эластичности спроса по цене и эластичности доли дохода потребителя по цене. Из формулы (7) прямая эластичность спроса по цене получится, если положить $i = l$, тогда

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{ji}) = \varepsilon(q_{ji}, p_{ji}) + 2\varepsilon(R_j, p_{ji}) - 2. \qquad (8)$$

Вычислим эластичность спроса по доходу. Из формулы (6) получим

$$\varepsilon\left(V_{ji}, R_j\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{R_j}{q_{ji}}\frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}}\frac{dp_{jk}}{dR_j} + \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}}\frac{dp_{jk}}{dR_j} - \frac{R_j}{p_{ji}}\frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}}\frac{dp_{jk}}{dR_j}\right) + \frac{R_j}{q_{ji}}\frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} + 1 - \frac{R_j}{p_{ji}}\frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j}.$$

Отсюда проведя аналогичные преобразования как при выводе формулы (7) получим окончательно

$$\varepsilon\left(V_{ji}, R_j\right) = \varepsilon\left(q_{ji}, R_j\right) + 2 - 2\varepsilon\left(p_{ji}, R_j\right). \qquad (9)$$

Формулы (7) – (9) выражают эластичности спроса через эластичности доли дохода потребителей и эластичности цены по цене и по доходу. Доля дохода потребителей зависят от цен на товары (услуги) и дохода потребителей, так же как и спрос на товары (услуги). Поэтому задача определения эластичности спроса приводится к задаче определения эластичности доли дохода потребителей, и эластичности цены по цене и доходу. Долю дохода потребителей ищем в виде следующей функции:

$$q_{ji} = C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{\alpha_{j,i,n+2}} \text{ для всех } j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n+1, \qquad (10)$$

удовлетворяющей условиям $0 \le q_{ji} \le 1$.

В силу наших предположений при одинаковом изменении всех цен (тарифов) и дохода потребителей структура потребления потребителей не изменяется, следовательно, если умножить все цены (тарифы) и доходы потребителей в θ раз, то доли дохода не изменятся. Подставляя в формулу (10) вместоp_{jk} и R_j соответственно θp_{jk} и θR_j получим

$$q_{ji} = C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} \theta^{\alpha_{jik}} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot \theta^{\alpha_{j,i,n+2}} R_j^{\alpha_{j,i,n+2}} = C_{ji} \cdot \theta^{\sum_{k=1}^{n+2}\alpha_{jik}} \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{\alpha_{j,i,n+2}},$$

откуда $\theta^{\sum_{k=1}^{n+2}\alpha_{jik}} = 1$, следовательно, $\sum_{k=1}^{n+2}\alpha_{jik} = 0$. Тогда формула (10) перепишется в виде

$$q_{ji} = C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{-\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{jik}} \text{ для всех } j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n+1. \qquad (11)$$

Предположим, что нам известны значения доли доходов, цен (тарифов), доходов потребителей заT периодов. Обозначим их соответственно, $q_{jit}^*, p_{jit}^*, R_{jt}^*$, где $t = 1,2,\dots,T$. Методом наименьших квадратов найдем неизвестные коэффициенты $C_{ji}, \alpha_{jik}, j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n+1, k = 1,2,\dots,n+1$, уравнения (11). Для этого значения цен (тарифов) p_{jit}^* и доходов потребителей R_{jt}^* приведем к одному периоду дисконтированием по уровню инфляции между периодами. Полученные значения обозначим так же. При этом цены $p_{j,n+1}$ будут отличными от единицы. Пользуясь балансовыми соотношениями (4) исключим из перечня неизвестных $q_{j,n+1}$:

$$q_{j,n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{-\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{jik}}\right), j = 1,2,\dots,m. \qquad (12)$$

Перепишем уравнение (11) в следующем виде, предварительно прологарифмировав обе части:

$$\bar{q}_{ji} = \bar{C}_{ji} + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\bar{p}_{jk} - \bar{R}_j\right)\alpha_{jik} \text{ для всех } j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n,$$

где $\bar{q}_{ji} = lnq_{ji}$, $\bar{C}_{ji} = lnC_{ji}$, $\bar{p}_{ji} = lnp_{ji}$, $\bar{R}_j = lnR_j$. Для определения коэффициентов $\bar{C}_{ji}$ и α_{jik} будем минимизировать функционал

$$F\left(\bar{C}_{ji}, \alpha_{jik}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{q}_{jit}^* - \bar{C}_{ji} - \sum_{k=1}^{n+1}(\bar{p}_{jkt}^* - \bar{R}_{jt}^*)\alpha_{jik}\right)^2,$$

где $\bar{q}^*_{jit} = \ln(q^*_{jit})$, $\bar{p}^*_{jit} = \ln(p^*_{jit})$, $\bar{R}^*_{jt} = \ln(R^*_{jt})$. Тогда искомые величины $\bar{C}_{ji}$ и α_{jik} удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\bar{p}^*_{jkt} - \bar{R}^*_{jt}\right)\alpha_{jik} + T\cdot\bar{C}_{ji} = \sum_{t=1}^{T}\bar{q}^*_{jit}, j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n, \tag{13}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{n+1}\left(\bar{p}^*_{jlt} - \bar{R}^*_{jt}\right)\left(\bar{p}^*_{jkt} - \bar{R}^*_{jt}\right)\alpha_{jil} + \sum_{t=1}^{T}\left(\bar{p}^*_{jkt} - \bar{R}^*_{jt}\right)\bar{C}_{ji} = \sum_{t=1}^{T}\left(\bar{p}^*_{jkt} - \bar{R}^*_{jt}\right)\bar{q}^*_{jit}. \tag{14}$$
$$j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,n+1$$

Система уравнений (13) – (14) содержит $mn(n+2)$ уравнений. Решив систему линейных алгебраических уравнений (13) – (14) находим $\bar{C}_{ji}$, α_{jik}при $j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,n+1$ и определим C_{ji} по формуле $C_{ji} = \exp(\bar{C}_{ji})$.

Далее из формулы (11) вычислим эластичность доли доходов потребителей. По определению $dq_{ji} = \sum_{l=1}^{n+1}\frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jl}}dp_{jl} + \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j}dR_j = \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}q_{ji}\frac{dp_{jl}}{p_{jl}} - \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\,q_{ji}\frac{dR_j}{R_j}$,

откуда

$$\frac{dq_{ji}}{q_{ji}} = \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\frac{dp_{jl}}{p_{jl}} - \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\frac{dR_j}{R_j} \tag{15}$$

Из формулы (15) с помощью элементарных преобразований получим

$$\varepsilon\left(q_{ji}, p_{jk}\right) = \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\cdot\varepsilon\left(p_{jl}, p_{jk}\right) - \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\cdot\varepsilon\left(R_j, p_{jk}\right), \tag{16}$$

$$\varepsilon\left(q_{ji}, R_j\right) = \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\cdot\varepsilon\left(p_{jl}, R_j\right) - \sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}, \tag{17}$$

где $j = 1,2,\dots,m, i = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,n+1$. При $i = n+1$ из формулы (12) получим

$$\frac{dq_{j,n+1}}{q_{j,n+1}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{q_{ji}}{q_{j,n+1}}\frac{dq_{ji}}{q_{ji}},$$

откуда

$$\varepsilon\left(q_{j,n+1}, p_{jk}\right) = -\frac{1}{q_{j,n+1}}\sum_{i=1}^{n}q_{ji}\varepsilon\left(q_{ji}, p_{jk}\right), \tag{18}$$

$$\varepsilon\left(q_{j,n+1}, R_j\right) = -\frac{1}{q_{j,n+1}}\sum_{i=1}^{n}q_{ji}\varepsilon\left(q_{ji}, R_j\right), \tag{19}$$

где $j = 1,2,\dots,m, k = 1,2,\dots,n+1$.

Формулы (16) – (19) выражают эластичности долей дохода потребителей через эластичности цен. Таким образом, формулы (7) – (9), (16) – (19) сводят определение эластичностей спроса к определению эластичностей цен.

Матрица эластичностей цен является обратно симметричной матрицей, диагональные элементы которой равны единице. Обозначим матрицу эластичностей цен через $B = \left\{b_{jik}\right\}_{j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots n+2,k=1,2,\dots,n+2}$, то есть $b_{jik} = \varepsilon\left(p_{ji}, p_{jk}\right)$ при $i,k \in [1,\dots,n+1]$ и $b_{j,i,n+2} = \varepsilon\left(p_{ji}, R_j\right)$, $b_{j,n+2,k} = \varepsilon\left(R_j, p_{jk}\right)$. Для любого фиксированного j для произвольных $i,k,l \in [1,\dots,n+2]$ справедливы равенства $b_{jik}\cdot b_{jkl} = b_{jil}$. Следовательно, при любом фиксированном j сечение матрицы B является матрицей предельно устойчивого рынка. Согласно теории спекулянта [1, 2] данная матрица однозначно восстанавливается n+1 образующими числами. Для нахождения этих чисел достаточно знать одну строку или столбец данной матрицы. Обозначим эти числа через $s_{ji}, i = 1,2,\dots,n$+1. Тогда для $j,i > 1, k > 1$

$$b_{jik}=\frac{\prod_{l=1}^{k-1}s_{jl}}{\prod_{l=1}^{i-1}s_{jl}},\ b_{j1k}=\prod_{l=1}^{k-1}s_{jl},\ b_{ji1}=\frac{1}{\prod_{l=1}^{i-1}s_{jl}}. \qquad (20)$$

Кроме того, для любых j,i

$$s_{ji}=b_{j,i,i+1}=\varepsilon\left(p_{ji},p_{j,i+1}\right)=\frac{1}{\varepsilon\left(p_{j,i+1},p_{ji}\right)}. \qquad (21)$$

Выразим элементы последнего столбца матрицы B_j через образующие s_{ji}. Имеем

$$b_{j,i,n+2}=\varepsilon\left(p_{ji},R_j\right)=\prod_{l=i}^{n+1}s_{jl},\ i=1,2,\dots,n+1.$$

Отсюда

$$b_{jik}=\frac{b_{j,i,n+2}}{b_{j,k,n+2}}\text{для } j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n+1,k=1,2,\dots,n+1.$$

То есть

$$\varepsilon\left(p_{ji},p_{jk}\right)=\frac{\varepsilon\left(p_{ji},R_j\right)}{\varepsilon\left(p_{jk},R_j\right)}\ \text{для } j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n+1,k=1,2,\dots,n+1. \qquad (22)$$

Таким образом мы выразили все эластичности цены по цене через эластичности цены по доходу. Тогда объединяя формулы (16), (17) и (22) получим

$$\varepsilon\left(q_{ji},p_{jk}\right)=\frac{1}{\varepsilon\left(p_{jk},R_j\right)}\left(\sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\varepsilon\left(p_{jl},R_j\right)-\sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\right), \qquad (23)$$

$$\varepsilon\left(q_{ji},R_j\right)=\sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}\varepsilon\left(p_{jl},R_j\right)-\sum_{l=1}^{n+1}\alpha_{jil}, \qquad (24)$$

где $j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n,k=1,2,\dots,n+1$. Полученные формулы (23), (24), (18), (19) выражают эластичности доли доходов потребителей $\varepsilon\left(q_{ji},p_{jk}\right)$ при $j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n+1,k=1,2,\dots,n+1$, и $\varepsilon\left(q_{ji},R_j\right)$ при $j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n+1$, только через эластичности цены по доходу $\varepsilon\left(p_{ji},R_j\right)$ при $j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n+1$, и коэффициенты α_{jik} при $j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n,k=1,2,\dots,n+1$. Таким образом, для вычисления эластичностей спроса необходимо и достаточно вычислить эластичности цены по доходу. Эластичности спроса выражаются через эластичности цен по доходу следующим образом:

$$\varepsilon\left(V_{ji},p_{jl}\right)=\frac{1}{\varepsilon\left(p_{jl},R_j\right)}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{jik}\varepsilon\left(p_{jk},R_j\right)-\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{jik}+2-2\varepsilon\left(p_{ji},R_j\right)\right),$$

$$j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n,l=1,2,\dots,n+1.$$

$$\varepsilon\left(V_{ji},R_j\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{jik}\varepsilon\left(p_{jk},R_j\right)-\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{jik}+2-2\varepsilon\left(p_{ji},R_j\right),$$

$$j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n.$$

Список использованных источников.

1. Габбасов М.Б. Математическая теория о спекулянте на рынках валют. – V Международная научная конференция «Проблемы уравнений, анализа и алгебры», г. Актобе, 2009 г.
2. Габбасов М., Заурбеков С., Биахметов А. Об одной задаче о спекулянте на рынках валют. – Труды II Международной научно-практической конференции Информатизации общества, г. Астана, 2010 г.