



БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері

Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования

в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22

М 49

В подготовке Сборника принимали участие:

Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22.1

Из графиков следует, что при смещении центра масс, происходит изменение угла размаха колебаний до $5,5 \text{ rad}$, период уменьшается и составляет $1,8 \text{ с}$. Угловая скорость колебания катка имеет полуразмахи свыше 14 рад/с . Период составляет $1,9 \text{ с}$.

Из анализа кривых изменения угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ следуют, что в целом характер колебаний имеет тенденцию к затуханию. Кроме этого полученные графики показывают, что при увеличении смещения центра масс катка от его геометрического центра, приводит к увеличению угла размаха колебаний. Однако период этих колебаний снижается.

Список используемых источников

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука. 1994.
2. Tyurehodzhaev A.N. *Analytical solutions of nonlinear equations and differential equations with variable coefficients*. Proceedings of the «Actual Problems of Mechanics and Engineering» IV International Scientific Conference, II, Almaty, 40-57 (2014).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЛАДКОГО СОПРЯЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Бостанов Б.О., Мухамбеталина Д.Ж., Исенова Ж.Ж.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: bostanov_bayandy@mail.ru

Рассматривается движение тела по траектории комбинированной формы, состоящей из полудуг окружности и параболы (коники). В месте сопряжения нет гладкости соединения, т.е. нет общей касательной линии, возникает скачок по скорости. Для того чтобы не было скачка предлагается вставить между дугами переходной участок, математической моделью которого является коника [1-2].

Пусть для движения некоторой материальной точки требуется формировать гладкую комбинированную беговую дорожку (траекторию), состоящей из дуг окружности

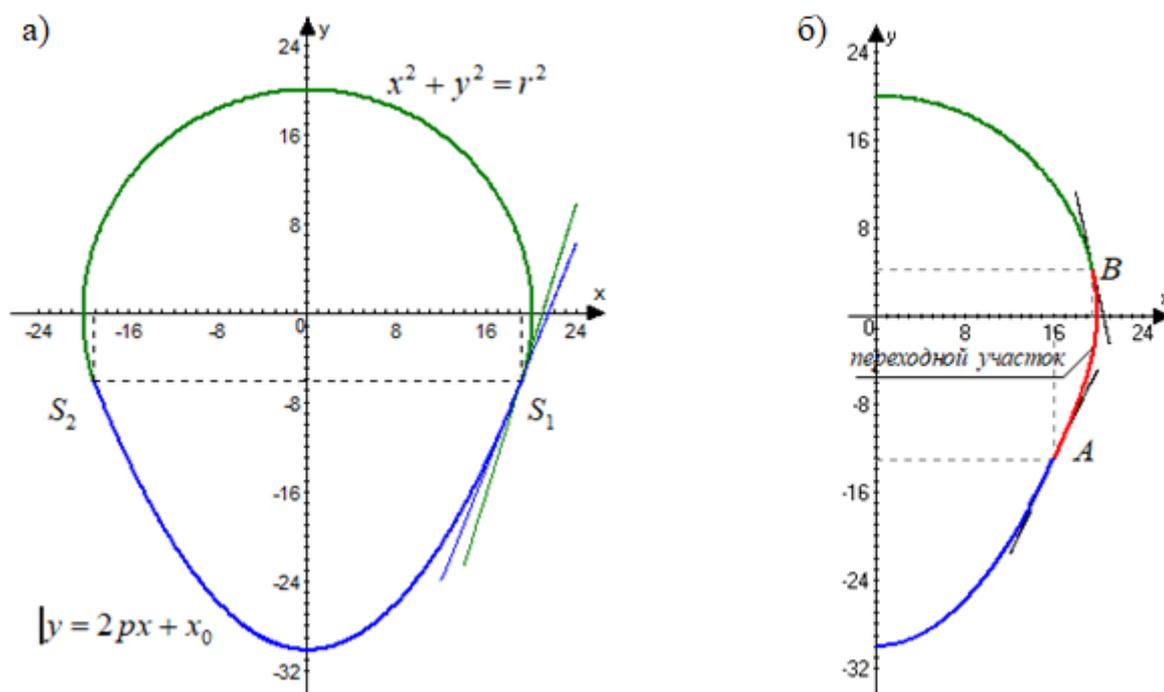


Рис.1 Комбинированная траектория и переходной участок

$x^2 + y^2 = r^2 = 20^2$ и параболы $y = 0.066x^2 - 30$. Точками сопряжения являются $S_1(19.1135; -5.8886)$, $S_2(-19.1135; -5.8886)$ (рис.1а). Рассмотрим правую часть траектории от оси Oy и проведем касательные:

$$L_{S_1r} : y = 3.2458x - 67.9277;$$

$$L_{S_2r} : y = 2.5223x - 54.1115.$$

Таким образом, в точке стыковки S_1 касательные не совпадают, что приведет к прерывному, не гладкому движению по траектории.

Всякая невырожденная кривая второго порядка может быть получена как сечение конуса, поэтому такие кривые называют коническими сечениями или просто кониками. Эллипс и окружность представляют собой замкнутые коники [1].

Ролик бегунка вибровозбудителя совершает движение по комбинированной беговой дорожке, составленной из дуг коник с общей касательной в точках соединения. При переходе из одной части в другую, в точках соединения возникает разрыв кривизны, вызывающий скачок центробежной силы. Для того, чтобы обеспечить переход без скачка необходимо между ними вставить переходный участок в виде дуги кривой, удовлетворяющей условиям (рис. 1 б):

а) дуга должна проходить через точки соединения A и B ;

б) соединяющая и соединяемая части должны иметь одинаковую непрерывную первую производную в точках соединения (в этой точке скорости должны быть равными);

в) соединяющая и соединяемая части должны иметь одинаковую непрерывную вторую производную в точках соединения (в этой точке радиусы кривизны должны быть равными);

Составные кривые в технике получили название обводов, в математике они известны как сплайны. Термин «сплайн» происходит от английского слова spline – что означает гибкую полосу стали, которую применяли инженеры для проведения плавных кривых, например, для построения обводов кораблей и самолетов. Математически сплайн – это гладкая кривая, которая строится с использованием дуг и проходит через две или более контрольных точек, управляющих формой сплайна. Основной характеристикой сплайна является гладкость, которая определяется числом совпавших производных в точках соединения. Соединение, удовлетворяющее условиям а) и б), соответствует первому порядку гладкости (совпадают только первые производные). Соединение, удовлетворяющее всем трем условиям а), б) и в), соответствует второму порядку гладкости. Гладкость второго порядка называется плавностью [2].

Если вдоль сплайна совершается механическое движение, то непрерывность второй производной предполагает непрерывность ускорения и, следовательно, отсутствие резких изменений приложенной силы. Будем рассматривать задачу проведения гладкой кривой – коники – по заданным граничным точкам.

Общий вид коники описывается квадратичной формой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Делим все члены квадратичной формы на свободный коэффициент $a_{33} \neq 0$ и в итоге получим пять неизвестных коэффициентов и константу 1. Решая систему из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными, получим каждый из коэффициентов $a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{33}}$.

Р.А. Лайминг (Liming R.A) применил метод, основанный на использовании дуг коник, удовлетворяющих условиям сопряжения и касания, который избавляет от необходимости решения системы из пяти линейных уравнений [3].

Пусть два конических сечения заданы уравнениями $S_1(x, y) = 0$ и $S_2(x, y) = 0$, то уравнение $(1 - \lambda)S_1 + \lambda S_2 = 0$ определяет еще одну конику, проходящую через точки пересечения кривых $S_1(x, y) = 0$ и для $S_2(x, y) = 0$, при любых значениях параметра λ .

Изменяя величину параметра λ получим пучок конических сечений, два из которых определяются уравнениями $S_1 = 0$ (при $\lambda = 0$) и для $S_2 = 0$ (при $\lambda = 1$) (рис. 2а).

Чтобы найти величину параметра λ в заданная некоторая точка P , лежащая на конике $(1 - \lambda)S_1 + \lambda S_2 = 0$. Если выбранная точка имеет координаты x_P и y_P , то параметр определяется по формуле

$$\lambda = \frac{S_1(x_P, y_P)}{[S_1(x_P, y_P) - S_2(x_P, y_P)]}.$$

Возьмем две прямые $L_1 = (a_1x + b_1y + c_1) = 0$ и $L_2 = (a_2x + b_2y + c_2) = 0$. Тогда $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ или $L_1 \cdot L_2 = 0$ является уравнением второго порядка, которому удовлетворяют все точки, лежащие на паре прямых $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$. Это уравнение фактически определяет вырожденное коническое сечение, получаемое в результате рассечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину параллельно оси.

Итак, уравнение $(1 - \lambda) \cdot L_1 \cdot L_2 + \lambda \cdot L_3 \cdot L_4 = 0$ представляет семейство или пучок

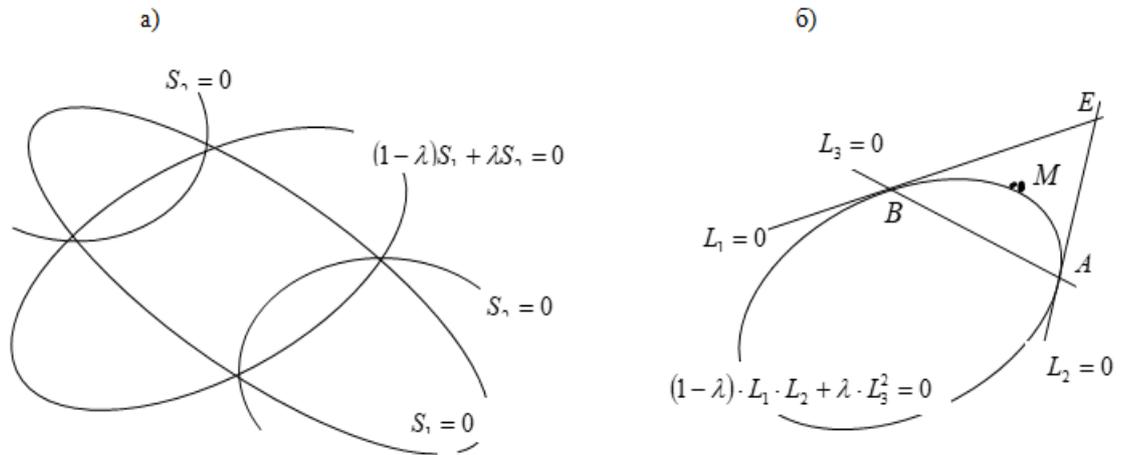


Рис. 2. Задания коник

конических сечений, проходящих через четыре точки пересечения двух пар прямых линий (L_1, L_2) и (L_3, L_4) . Задавая произвольную пятую точку, можно определить значение λ .

Лайминг показал, что применяя этот метод, можно найти уравнение конического сечения, имеющее две заданные касательные в двух точках и проходящее через третью точку.

Если прямые $L_3 = 0$ и $L_4 = 0$ совпадают, то получим уравнение

$$(1 - \lambda) \cdot L_1 \cdot L_2 + \lambda \cdot L_3^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой пучок конических сечений, проходящих через точки A и B , здесь прямая $L_2 = 0$ является касательной в точке A , а прямая $L_1 = 0$ - касательной в точке B , прямая $L_3 = 0$ хордой, соединяющей точки A и B (рис.2б).

Параметр λ определяется заданием (выбором) точки M , если точка M имеет координаты x_M и y_M , тогда

$$\lambda = \frac{L_1(x_M, y_M)L_2(x_M, y_M)}{L_1(x_M, y_M)L_2(x_M, y_M) - L_3^2(x_M, y_M)} \quad (2)$$

Таким образом, коническое сечение переходного участка беговой дорожки определяется четырьмя точками [4]:

- двумя точками соединения – точками касания A и B ;
- точкой пересечения касательных E ;
- некоторой точкой M .

Выбирая точку M внутри базисного треугольника ΔAEB мы определяем непрерывную кривую первого порядка гладкости между точками соединения A и B :

- если точка M делит пополам прямую, соединяющую середины отрезков касательных BE и AE , то получаем параболу;
- если точка M находится между этой параболой и прямой AB , то получаем эллипс;
- если точка M находится за пределами параболы в сторону точки E , то получаем гиперболу.

Покажем на примере комбинированной траектории, состоящей из дуги $x^2 + y^2 = r^2 = 20^2$ окружности и дуги $y = 0.066x^2 - 30$ параболы, создание переходной коники, обеспечивающая соединение гладкости первого порядка.

Произвольно выберем некоторый участок AB , где необходимо вставить переходную кривую.

Пусть $A(16; -13.104)$ и $B(19.5329; 4.2972)$. Точка A лежит на параболе, а точка B - на окружности.

Проведем касательные через выбранные точки A и B , а также прямую соединяющую эти точки. Тогда

$$\begin{aligned} L_{A\tau}: & y = 2.112x - 46.896, \\ L_{B\tau}: & y = -4.5455x + 93.0841, \\ L_{AB}: & y = 4.9255x - 91.9116. \end{aligned}$$

Точка пересечения касательных - $T(21.0259; -2.4892)$.

В результате получаем базисный треугольник ΔATB , образованный и касательных $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ и хорды L_{AB} . Согласно методу Лайминга, дуга искомой переходной кривой лежит внутри базисного треугольника, причем стороны AT и BT будут касательными для переходной кривой в соответствующих точках.

Уравнение переходной кривой получим в виде уравнении Лайминга:

$$F(x, y) = (1 - \lambda)(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841) + \lambda(4.9255x - y - 91.9116)^2 = 0.$$

Теперь выберем внутри базисного треугольника некоторую точку M с координатами $x_M = 19$ и $y_M = -4$ (рис.3а). Далее подставляя значения координат x_M , y_M в выражение (2) найдем коэффициент λ , тогда

$$\lambda = \frac{(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841)}{(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841) - (4.9255x - y - 91.9116)^2} \Bigg|_{\substack{x=19 \\ y=-4}} = 0.4853$$

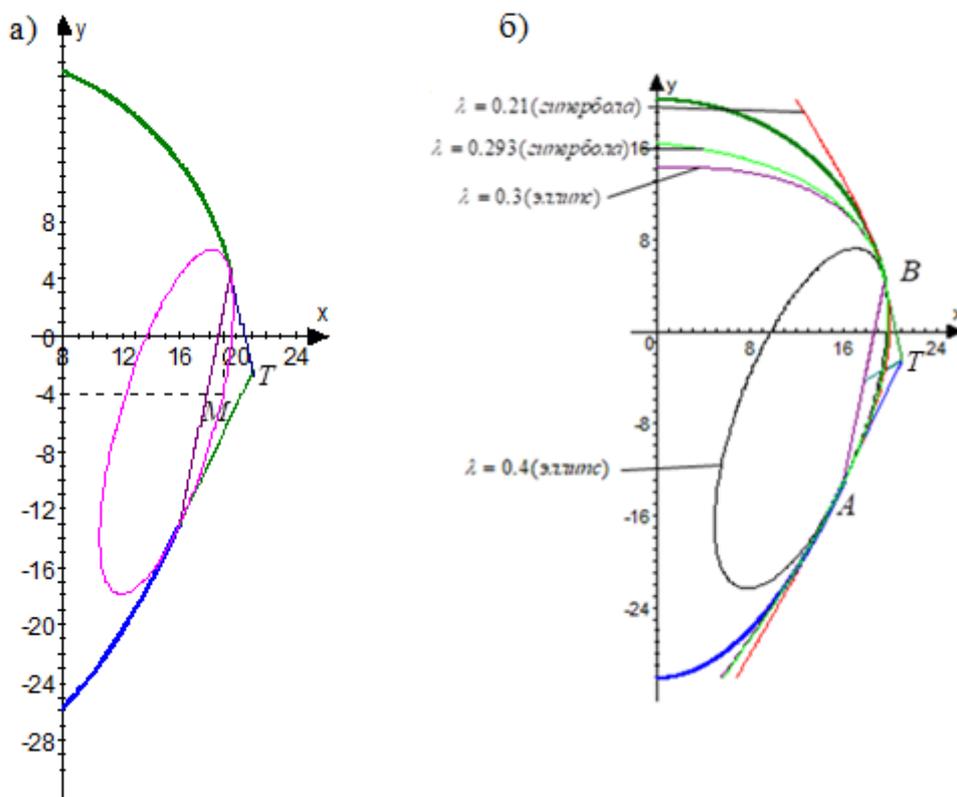


Рис. 3. Пучок коник первого порядка гладкости

Следовательно, искомое уравнение примет вид

$$(3) \quad 0.5147(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841) + 0.4853(4.9255x - y - 91.9116)^2 = 0$$

Полученное уравнение – уравнение кривой второго порядка. Сделав математические преобразование определим, что уравнение представляет собой эллипс (рис.3а).

Таким образом, комбинированная траектория состоит из круговой и параболической дуги с промежуточным участком - дугой переходного эллипса (3), которая обеспечит гладкость сопряжения.

Выбирая точки M в разных местах внутри базисного треугольника, получаем разные значения для λ , в результате чего получим множество переходных кривых (коник). Исходя из поставленных условия, исследователь выберет необходимую переходную кривую.

На рис. 3б представлены различные варианты переходного участка.

Список используемых источников

1. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. –М.: МЦНМО, 2007. – 136 с.
2. Е.С. Темирбеков, М.В. Дудкин, Б.О. Бостанов. Теоретические исследования планетарных вибровозбудителей с различной формой беговой дорожки для дорожных катков. Монография. – Астана: ТОО «ЦСЭП Консалтинг», 2009. 178 с. , илл.
3. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве /пер. с англ. – М.: Мир, 1982. - 304 с.

УДК 519.83.65

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

Букенов М.М., Азимова Д.Н., Жолмагамбетова Б.Р.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: Bukenov_M_M@mail.ru, Arfidea@mail.ru, Bakhytgulz@mail.ru

Рассмотрено применение метода фиктивных областей для среды Максвелла. Получены двусторонние оценки по малому параметру α сходимости приближенного решения к точному решению.

Ключевые слова: метод фиктивных областей, скорости-напряжения, малый параметр.

Рассмотрим динамическую задачу вязкоупругости построенную на основе модели Максвелла, в цилиндре $Q = \{D \times [0 \leq t \leq t_1]\}$, где $D \in R^3$ ограниченная односвязная область, с достаточно гладкой границей γ . Введем $\gamma_t = \gamma \times [0, t_1]$, векторы-столбцы деформаций и напряжений : $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T$, и $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23})^T$, символ T означает транспонирование, вектор- столбец скоростей $\vec{v} = (v_1 v_2 v_3)^T$. Как показано в работе [1] постановку этой задачи в скоростях-напряжениях можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R^* \vec{\sigma} = \vec{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t} - R \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$B \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + C \vec{\sigma} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t}, \quad (3)$$

Здесь \vec{f} - вектор массовых сил, $B = B^T$ -симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от констант Ламе; $C = C^T$ симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от коэффициента вязкости θ , матрицы B, C – перестановочны, их вид приведен в работе [2] R-линейный матрично-дифференциальный оператор:

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T, \quad R^* = -R^T, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3$$

Уравнение (1) выражает закон сохранения импульса, если объемная плотность $\rho \equiv 1$. Соотношение (2) является следствием соотношения перемещения - деформации:

$$\vec{\varepsilon} = R \vec{u},$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор перемещений. Векторы перемещений \vec{u} и скорости \vec{v} связаны соотношением $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. Соотношение (3) является уравнением состояния для вязкоупругой среды Максвелла. Решение системы (1)-(3) ищется в цилиндре Q при этом:

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{\varphi}(x), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, 0) = \vec{\psi}(x), \quad x \in D$$

и, соответственно

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{\psi}(x), \quad \vec{\varepsilon}(x, 0) = R \vec{\varphi}(x) \quad (4)$$

Перемещения $\vec{u}(x, t)$ определяются из соотношения

$$\vec{u}(x, t) = \vec{\varphi}(x) + t \vec{\psi}(x) + \int_0^t (t-s) \vec{r}(x, s) ds, \quad \vec{r}(x) = -R^* \vec{\sigma}$$

На боковой поверхности цилиндра Q искомое решение удовлетворяет однородному краевому условию.