EURASIAN
NATIONAL
UNIVERSITY

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция
«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері
Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»
3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция
«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования
в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»
3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника принимали участие:
Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9 ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22.1

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ ТИПА ХААРА И СВОЙСТВА

А. Абиш, А. Байдавлетов, К. Сулейменов
Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, Астана
E-mail: Adilbek.abish@gmail.com, baidauletov_at@mail.ru, kenessary@mail.ru

В работе вводится система функций, называемая системой типа Хаара, изучается вопрос о полноте введенной системы, а также то, что данная система является базисом в пространстве $L^2(0,1)$.

Ключевые слова. Ортонормированная система функций, коэффициенты Фурье.

На сегменте $[0,1]$ введем систему функций следующим образом ($\alpha > 0$):

$$\chi_0^0(t) = 1, \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\chi_{0,\alpha}^1(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{1+\alpha}-1}, & 0 \le t < \dfrac{1}{2^{1+\alpha}}, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2^{1+\alpha}-1}}, & \dfrac{1}{2^{1+\alpha}} < t \le 1. \end{cases}$$

Для любого натурального числа n, $\alpha > 0$ положим

$$\chi_{n,\alpha}^1(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha}-1)}, & 0 \le t < \dfrac{1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ 0, & t = \dfrac{1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ -\sqrt{\dfrac{2^{n(1+\alpha)}}{2^{1+\alpha}-1}}, & \dfrac{1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}} < t < \dfrac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ -\dfrac{1}{(2^{1+\alpha}-1)} \cdot \sqrt{\dfrac{2^{n(1+\alpha)}}{2^{1+\alpha}-1}}, & t = \dfrac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ 0, & \dfrac{1}{2^{n(1+\alpha)}} < t \le 1. \end{cases}$$

$$\chi_{n,\alpha}^{(2^n)}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 - \dfrac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ \dfrac{1}{2^{1+\alpha}-1}\sqrt{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha}-1)}, & t = 1 - \dfrac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ \sqrt{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha}-1)}, & 1 - \dfrac{1}{2^{n(1+\alpha)}} < t < 1 - \dfrac{2^{1+\alpha}-1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ 0, & t = 1 - \dfrac{2^{1+\alpha}-1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ -\sqrt{\dfrac{2^{n(1+\alpha)}}{2^{1+\alpha}-1}}, & 1 - \dfrac{2^{1+\alpha}-1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}} < t \le 1. \end{cases} \quad n = 1,2,..$$

Для $n = 1,2, \dots, \quad k = 2, \dots, 2^n - 1, \ \alpha > 0$

$$
\chi_{n,\alpha}^{k}(t) = \begin{cases}
0, & 0 \le t < \dfrac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\
\dfrac{1}{2^{1+\alpha}-1}\sqrt{2^{n(1+\alpha)}}, & t = \dfrac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\
\sqrt{\dfrac{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha}-1)}{k^{1+\alpha}-(k-1)^{1+\alpha}}}, & \dfrac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}} < t < \dfrac{k^{1+\alpha}+(2^{1+\alpha}-1)\cdot(k-1)^{1+\alpha})}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\
0, & t = \dfrac{k^{1+\alpha}+(2^{1+\alpha}-1)\cdot(k-1)^{1+\alpha})}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\
-\sqrt{\dfrac{2^{n(1+\alpha)}}{(2^{1+\alpha}-1)(k^{1+\alpha}-(k-1)^{1+\alpha})}}, & \dfrac{k^{1+\alpha}-(2^{1+\alpha}-1)\cdot(k-1)^{1+\alpha})}{2^{(n+1)(1+\alpha)}} < t < \dfrac{k^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\
-\dfrac{1}{2^{1+\alpha}-1}\sqrt{2^{n(1+\alpha)}}, & t = \dfrac{k^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\
0, & \dfrac{k^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}} < t \le 1.
\end{cases}
$$

Положим

$$\chi_1(t) \equiv \chi_0^{(0)}(t) \quad \text{и} \quad \chi_{m,\alpha}(t) \equiv \chi_{n,\alpha}^{(k)}(t)$$

при $m = 2^n + k, \quad 1 \le k \le 2^n, \alpha > 0, \ \ n = 0,1, \dots$.

Данную систему назовем системой функций типа Хаара (определение системы Хаара см., напр. в [1, 2]).

Скалярным произведением функции $f, \varphi \in L(0,1)$ называется [2]

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx.$$

Имеет место

Теорема 1. Система функций типа Хаара $\{\chi_{m,\alpha}(t)\}_{m=2}^{\infty}$ является ортонормированной в $L^2(0,1)$.

Система функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется полной в пространстве $L(0,1)$, если каждая функции $f \in L(0,1)$, для которой справедливы соотношения

$$\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = 0,$$

сама равна нулю [2].

Справедлива

Теорема 2. Система функций типа Хаара $\{\chi_{m,\alpha}(t)\}_{m=2}^{\infty}$ является полной в пространстве $L(0,1)$.

Список использованных источников

1. П. Л. Ульянов, О рядах по системе Хаара, Матем. сб., 1964, том 63(105), №3, стр. 356–391.
2. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Москва, Физматгиз, 1958.