ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы
және механика-математика факультеті
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**Республиканской научно-методической конференции
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,
посвященной 20-летию Евразийского национального университета
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»
механико-математического факультета
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ƏОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ƏОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

Салдар. Егер A_n аффиндік кеңістігінде өлшемдіктері оң P_k және P_l айқас жазықтықтары бар болса, онда

$$k \leq n\text{-}2, \quad l \leq n\text{-}2$$

Дербес жағдай. Гипержазықтық оң өлшемді қандай да жазықтықпен айқаса алмайды.

5-*теорема*. Егер A_n-де P_k, P_l және $L_m = L_k \cap L_l$ жазықтықтарының өлшемдіктері

$$k + l - m \geq n$$

шартына бағынса, онда P_k және P_l қиылысады; мұндағы L_k мен L_l - сәйкесінше P_k мен P_l–дің бағыттаушы ішкі кеңістіктері.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966.
2. Щербаков Р.Н., Малаховский В.С. Краткий курс аналитической геометрии. Томск. 1964.
3. Яглом И. М., Ашкинузе В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч.1 М., Учпедгиз, 1962.
4. Комиссарук А.М. Основы аффинной геометрии на плоскости. Минск. «Вышейшая школа», 1967.
5. Комиссарук А.М. Аффинная геометрия. Минск. «Вышейшая школа», 1977.

ӘОЖ 514.123

ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІНДЕГІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІ

МусинА.Т., Дәулетбақова Р.Б.

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Казақстан

n-өлшемді Евклид кеңістігін қарастырайық, оны төменде R^n арқылы белгілейтін боламыз және оған нүктенің координаталарын енгізіп бекітеміз: сонымен $M \in R^n$ нүктесінің орналасуы оның $x^1, x^2, ..., x^n$ координаталарымен бірмәнді анықталады.

Әрине бұл координаталар кеңістікте бекітілген $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ базисіне қатысты алынған.

Демек, кеңістікке декарт координаталарын енгізу дегеніміз кеңістіктің әрбір нүктесіне оның *координаталары* деп аталатын $x^1, x^2, ..., x^n$ нақты сандар бумасын сәйкестікке қою, сонымен бірге

a) кеңістіктің өзгеше нүктелеріне координаталардың да өзгеше бумалары сәйкес қойылады. Бұл мынаны білдіреді ($x^1, x^2, ..., x^n$), (y^1, ..., y^n) координаталарына ие P және Q нүктелері тек қана $x^i = y^i$, $i = 1, ...,$ n болғанда беттеседі;

b) керісінше, нақты x^i сандарының әрбір ($x^1, x^2, ..., x^n$) бумасына кеңістіктің белгілі бір нүктесі сәйкес.

Евклид кеңістігінің нүктелерін нақты сандар бумасымен сипаттау идеясы геометриялық есептерді алгебра әдістерімен шығаруға мүмкіндік беретін аналитикалық геометрия негізінде жатады. Бұл маңызды идеяны математикаға алғаш Декарт енгізген болатын, сондықтан да координаталар Декарт есімімен аталған.

Геометрияны алгебраландыру тек геометрия да ғана емес, бүкіл математикаға төңкеріс еңгізді. Мұнда біз Декарттың әдісінен шығатын белгілі мысалдардан бас тартып (есімізге екінші ретті сызықтар немесе беттердің классификациясын алсақ та жеткілікті), оқырман қауымды алгебра және аналитикалық геометрия курстарына қайырамыз.

Тек қана айтып кететін жайт: R^n-дегі декарт координаталары евклид скаляр көбейтіндісімен - яғни әрбір қос $\overline{\xi}, \overline{\eta} \in R^n$ векторларына сәйкестікке қойылатын бисызықтық формасымен тығыз байланысты екенін ескертіп кеткен жөн. Бұл амалдың симметриялы, әрбір аргументі бойынша сызықтық, ал форманың өзі оң анықталған екендігін ұмытпау керек. Декарт координаталар жүйесінде $\overline{\xi}$ және $\overline{\eta}$ векторларының евклид *скаляр көбейтіндісі* деп $\overline{\xi} \cdot \overline{\eta}, (\overline{\xi}, \overline{\eta}), \langle \overline{\xi}, \overline{\eta} \rangle$ белгілерінің бірімен кескінделген және

$$\langle \overline{\xi}, \overline{\eta} \rangle = \xi^1 \eta^1 + ... + \xi^n \eta^n, \tag{1}$$

$$\overline{\xi} = \left(\xi^1, ..., \xi^n\right), \quad \overline{\eta} = \left(\eta^1, ..., \eta^n\right) \tag{2}$$

формуласы бойынша есептелетін санды айтады.

Қаншама маңызды болғанымен, көптеген көрнекті есептерді ыңғайлы аналитикалық түрде жазуда декарт координаталарының жеткіліксіз екендігі қарапайым мысалдардан-ақ көрінеді.

Айтқан пікіріміздің растығын декарт координаталарымен қамтамасыз етілген жазықтықтағы қисықтардың теңдеулерін жазу мысалында көрсетейік.

Әрине қарапайым сызықтарды, мәселен шеңбер немесе эллипсті алатын болсақ, олардың декарт координаталарындағы аналитикалық өрнегі өте ықшамды.

Шынында R радиусты, центрі $C(\alpha, \beta)$ нүктесінде орналасқан шеңбер теңдеуі $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ түрінде жазылса, центрі сол C нүктесінде, a, b жартылай бас осьтеріне ие болатын эллипстің теңдеуі $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ түрінде жазылады.

Бірақ механикалық және физикалық есептеулерде декарт координаталарындағы өрнектелуі күрделі болып келетін тегіс сызықтар кездеседі. Мәселен, декарт координаталарында

$$\sqrt{x^2 + y^2} - e^{\lambda\left(arctg\frac{y}{x}\right)} = 0 \tag{3}$$

теңдеуі спиральды анықтайды.

Әлбетте, сызықтың декарт координаталарындағы жазылуы тым күрделі болмағанымен, бұл сызықтың өзгеше - жазықтықтағы *поляр* деп аталатын координаталар жүйесіндегі өрнегі анағұрлым ықшамды екенін көруге болады.

Декарт координаталарымен $x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$ қатынастары арқылы байланысқан r, φ поляр координаталарындағы аталған сызықтың (спиральдің) теңдеуі

$$r = e^{\lambda\varphi}. \tag{4}$$

Кеңістік аймағының әрбір нүктесіне декарт координаталарының түрлі бумаларан сәйкестікке қоюға болады, мәселен нүктенің $(x^1, ..., x^n)$ бастапқы координаталарымен бірге оның жаңа $(z^1, ..., z^n)$ координаталары да бар.

Жаңа және ескі координаталар арасында аналитикалық геометриядан белгілі сызықтық тәуелділіктер бар. Оларды

$$x^i = x^i(z^1, ..., z^n), \qquad i, j = 1, ..., n, \tag{5}$$

$$z^j = z^j(x^1,..., x^n)$$

түрінде жазуымызға болады.

Алдымен кеңістіктегі координаталардың сызықтық түрленуін жазып алайық:

$$x^i = a^i_j z^j \quad i, j = 1,...., n \tag{6}$$

(мұнда қайталанатын j индексі бойынша қосынды жүргізіледі).

(6) формулалары P нүктесінің $x^1, x^2,..., x^n$ декарт координаталары оның жаңа $z^1,...., z^n$ координаталары арқылы $A = (a^i_j)$ матрицасы көмегімен өрнектелетіндігін білдіреді. Бұл теңдікті қысқаша

$$X = AZ\,, X = (x^1, x^2,..., x^n),\ Z = (z^1,...., z^n) \tag{7}$$

түрінде жазуға болады. Z - ті X арқылы өрнектеу үшін $A = (a^i_j)$ матрицасының кері

$$B = A^{-1} = (b^i_j) \tag{8}$$

матрицасы болуы қажет және жеткілікті. Кері матрица элементтері

$$b^i{}_j a^j{}_k = \delta^i{}_k \quad i, j, k = 1,...., n \tag{9}$$

қатынастарынан анықталады, мұндағы

$$\delta^i{}_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{10}$$

- Кронекер символы, ал j индексі бойынша қосынды жүреді.

Сонымен A матрицасының қайтарымды, демек, нөлден өзгеше анықтауы-шы бар болу жағдайында ғана жаңа координаталарды ескі координаталар арқылы өрнектеуге болады:

$$Z = BX,\ z^j = b^j{}_k x^k\ . \tag{11}$$

Енді жаңадан кез келген

$$x^i = x^i(z^1,... z^n), \qquad i = 1,...., n \tag{12}$$

координаталарын қарастырайық, мұнда $x^i = x^i(z^1,... z^n)$ функцияларын үзіліссіз дифференциалдамалы (тегіс) деп санаймыз.

Анықтама. Егер $A = \left(a^i{}_j\right) = \left.\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)\right|_{z^1 = z^1_0,....., z^n = z^n_0}$ *матрицасының (мұндағы* $z^1{}_0,..., z^n{}_0$ *үшін* $x^i(z^1{}_0,..., z^n{}_0) = x^i{}_0, i = 1, 2, ..., n$*) анықтауышы нольден өзгеше болса,* $P(x^1{}_0,..., x^n{}_0)$ *нүктесі* $(z^1,... z^n)$ *координаталар жүйесінің ерекше емес нүктесі делінеді.*

A матрицасы берілген ауыстырманың *Якоби матрицасы* делініп $\hat{J} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)$ арқылы белгіленеді. Якоби матрицасының анықтауышы *якобиан* аталынып $J = \det\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right) = \det \hat{J}$ арқылы белгіленеді.

Математикалық анализ курсынан кері түрлендіру жөніндегі мынадай теорема (айқындалмаған функциялар теоремасының дербес жағдайы) белгілі:

Егер жаңа $x^i = x^i(z)$ координаталарына көшу беріліп $x^i{}_0 = x^i(z^1{}_0,... z^n{}_0)$ және

$$J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\Bigg|_{z^1 = z_0^1,\ldots,z^n = z_0^n} \neq 0 \qquad (13)$$

болса, онда $(x^1{}_0,\ldots,x^n{}_0)$ нүктесінің неғұрлым кіші аймағында $z^1,\ldots,z^n$ координаталарын $z^i = z^i(x)$ түрінде $x^1,\ldots,x^n$ арқылы өрнектеуге болады, мұнда $z^i{}_0 = z^i(x^1{}_0,\ldots x^n{}_0)$, $i = 1,\ldots, n$ онымен қоса

$$\left(b^i{}_j\right) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right) \qquad (14)$$

матрицасы, атап айтқанда, кері түрлендірудің Якоби матрицасы

$$\left(a^k{}_l\right) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^l}\right) \qquad (15)$$

матрицасына кері, яғни

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial z^k} = \delta_k^i \qquad (16)$$

(j бойынша қосынды жүреді).

$n = 1$ болғандағы тұжырымның түрі:

Егер $x = x(z)$ және $\left.\frac{dx}{dz}\right|_{z=z_0} \neq 0$ болса, онда $z_0 = z(x_0)$ және $\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = 1$ болатындай x_0 нүктесінің неғұрлым кіші аймағында $z = z(x)$ өрнектелуі табылады (z - ті x арқылы өрнектеуге болады).

Жоғарыда қарастырылған координаталардың сызықтық ауыстырым жағдайында $X = AZ$, атап айтқанда $x^i = a^i{}_j z^i$. Бұл жағдайда $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ Якоби матрицасы A матрицасымен беттеседі, өйткені $a_k^i = \frac{dx^i}{dz^k}$ және бұл сандар тұрақты. Сонымен бірге $\det A \neq 0$ болса, онда ауыстырым кеңістіктің кез келген нүктесінде қайтарымды және $Z = BX$, мұнда B матрицасы A матрицасына кері.

Енді аналитикалық геометриядан белгілі жазықтықтағы және кеңістіктегі координаталардың мысалдарына тоқтайық:

1. *Поляр координаталары.* $x^1 = x,\ x^2 = y,\ n = 2$. Мұнда

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\ \ z^1 = r \geq 0,\ \ z^2 = \varphi.$$

$A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ Якоби матрицасын құрайық:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Якобиан үшін

$$J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = r \geq 0 \ . \qquad (18)$$

Сонымен якобиан тек қана $r = 0$ нүктесінде нольге тең. $r > 0$ (φ кез келген) аймағында жаңа координаталардың ерекше нүктелері жоқ.

$\{r > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi\}$ аймағында жаңа координаталар толық бірмәнді, ерекше нүктелері жоқ.

Сонымен координаталардың бас нүктесі ғана поляр координаталар жүйесінің ерекше нүктесі болып келеді.

2. *Цилиндрлік координаталар.* $z^1 = r, \quad z^2 = \varphi, \quad z^3 = z$ цилиндрлік координаталары үшөлшемді декарт кеңістігіндегі x^1, x^2, x^3 декарт координаталарымен

$$x^1 = r\cos\varphi, \qquad x^2 = r\sin\varphi, \qquad x^3 = z \qquad (19)$$

түрінде байланысқан. Мұнда $r = 0$ түзуі, яғни z осі бойында координаталық жүйе «бұзылады».

Шынында, Якоби матрицасының түрі:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

ал оның якобианы тек қана $r = 0$ болғанда нольге тең болады. $r > 0$ аймағында координаталар жүйесінің ерекше нүктелері жоқ. Жоғарыдағыдай φ координатасы $0 < \varphi < 2\pi$ аймағында бірмәнді.

3. *Үшөлшемді кеңістіктегі* $z^1 = r, \ z^2 = \theta, \ z^3 = \varphi$ *сфералық координаталары* үшін

$$x^1 = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad x^2 = r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$x^3 = r\cos\theta, \qquad r \geq 0, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi, \ 0 \leq \theta \leq \pi. \qquad (21)$$

Сфералық координаталар үшін Якоби матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

$J = \det A$ якобианы

$$J = r^2 \sin\theta \qquad (23)$$

шамасына тең.

Мұнан $r > 0, \ \theta \neq 0, \pi$ аймағында сфералық координаталар жүйесі бірмәнді және ерекше нүктелері жоқ.

$r = 0$ (θ, φ - кез келген) немесе $\theta = 0$, π (r, φ - кез келген) – сфералық координаталар жүйесінің ерекше нүктелері.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Щербаков Р. Н., Лучинин А. А. Краткий курс дифференциальной геометрии.-Томск: Изд-во Томского ун-та,1974.-264с.

2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.- М., «Наука», 1964.-672с.
3. Мусин А.Т. Векторлық және тензорлық есептеуге кіріспе. -Қарағанды,2007.-134с.
4. Мусин А.Т. Проективтік геометрияға кіріспе.- Қарағанды,1992.-141С.
5. Мусин А.Т. Аналитикалық геометрияның есептері мен жаттығулар жинағы.- Қарағанды,2007.-238С.

ӘОЖ 517.92

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ДЕРБЕС ШЕШІМДЕРІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӨЗГЕРІСІН ЗЕРТТЕУ.

Мырзатаева Қ.Р., Сейду М.Б.
kalbibi@mail.ru, medina-ms@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Үлестірілген параметрі бар материалдық жуйенің тербелімділігін анықтау есептерінің көбі шектік есептің λ меншікті мәнін анықтауға келтірілетіні белгілі.

$$\begin{aligned} &\left|\rho(t)y'(t)\right|' + [\lambda - q(t)]y = 0, \\ &\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ &\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{aligned} \qquad (*)$$

мұндағы $\rho(t) \in C[a,b]$, $q(t) \in C[a,b]$, α_j, β_j - кейбір тұрақтылар, $C[a,b]$ - $[a,b]$ аралығындағы үзілліссіз функциялар класы.

Осындай есептерге шектің көлденең тербелуі, серпінді стерженнің бойлық тербелуі, трубадағы дыбыстық тербелу,сымдағы электрлік тербелу есептері жатады.

(*) есебінің өзіндік функцияларының нөлі мен меншікті мәндерінің арасында тығыз байланыс бар. Нақтырақ айтсақ, өзіндік функцияларының нөлдерінің үлестірімін зеріктеу осы есептің дискретті меншікті мәндерінің ақырсыз жиыны бар екенінің дәлелдемесіне алып келеді.

Мұндай терең байланысты Ж.Штурм тапты және де

$$Ly(t) \equiv \left|\rho(t)y'(t)\right|' + v(t)y(t) = 0$$

теңдеуінің шешімінің нөлдері толық зеріктелді, мұндағы $\rho(t), v(t) \in C(I)$, $I -$ қандайда бір аралық.

Соның ішінде ол, I аралығындағы теңдеудің нақты нөлдерінің саны туралы "Штурм ережесін" жасады, (L) теңдеуінің шешімінің тербелімділігін және олардың нөлдерінің осьтегі үлестірімін зерттеді , салыстыру теоремаларын дәлелдеді.

Сызықты теңдеудің тербелімді шешімдерінің қасиеттерін Кнезер, Уитнер, Хартман және басқа авторлар өз еңбектерінде қарастырды. 70 – жылдарда сызықты емес теңдеулер класынан А.Эльберт және Д. Мирзов және басқада авторлар [2] өз жұмыстарында жартылай сызықты теңдеулердің тербелімділігін, шенелімділігін, асимптотикалық тәртібін және басқа да қасиеттерін алды. Соңғы он жылдықта А.Досли , Р. Марик, [1] Р. Ойнаров[3] және басқа зерттеушілер [1] сызықты , сызықты емес теңдеулердің тербелімділігін зерттеді. Соңғы